

Autoreferat

Opis dorobku i osiągnięć naukowych, w szczególności określonych w art. 219 ust. 1 pkt 2 lit. b Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce

dr inż. Robert Andrzej Krupiński

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
Wydział Elektryczny
Katedra Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej

Spis treści

1	Imię i nazwisko	2
2	Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej	2
3	Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych	2
4	Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.). Omówienie to winno dotyczyć merytorycznego ujęcia przedmiotowych osiągnięć, jak i w sposób precyzyjny określać indywidualny wkład w ich powstanie, w przypadku, gdy dane osiągnięcie jest dziełem współautorskim, z uwzględnieniem możliwości wskazywania dorobku z okresu całej kariery zawodowej	3
4.1	Tytuł osiągnięcia naukowego	3
4.2	Wykaz publikacji stanowiących osiągnięcie naukowe	3
4.3	Omówienie osiągnięcia naukowego	6
4.3.1	Wprowadzenie	6
4.3.2	Filtr adaptacyjny redukujący szum addytywny o uogólnionym rozkładzie Gaussa	11
4.3.3	Estymacja parametru kształtu uogólnionego rozkładu Gaussa dla małej wielkości próby	21
4.3.4	Uogólniony rozkład Gaussa z parametrem kształtu $p = 1/3$	39
4.3.5	Uogólniony rozkład Gaussa z parametrem kształtu $p = 1/m, m = 2, 3, \dots$	47
4.3.6	Uogólniony rozkład Gaussa ze zmienną losową kwaternionu rozszerzonego	53
4.3.7	Uogólniony rozkład Gaussa ze zmienną losową kwaternionu czystego rozszerzonego	62
4.3.8	Uogólniony rozkład Gaussa ze zmienną losową kwaternionu \mathbb{H} -właściwego	68
4.3.9	Zastosowanie uogólnionego rozkładu Gaussa w wibroakustycznym wykrywaniu uszkodzeń rdzenia transformatora mocy	73
4.3.10	Wykorzystanie uogólnionego rozkładu Gaussa w binaryzacji obrazów dokumentów	91
4.3.11	Podsumowanie osiągnięcia naukowego	92
4.3.12	Dodatkowe prace związane z uogólnionym rozkładem Gaussa	94
5	Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej	99
6	Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę	100
7	Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej	105

1 Imię i nazwisko

Robert Andrzej Krupiński

ORCID: 0000-0002-8575-4148

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

- 23.02.2006 – uzyskany stopień naukowy: **doktor nauk technicznych**, Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny, Katedra Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej, dyscyplina naukowa Elektrotechnika; tytuł rozprawy: *Rekonstrukcja obrazów z wykorzystaniem modeli rozkładu współczynników dyskretnej transformaty kosinusowej (DCT)*.
- 20.09.2002 – uzyskany tytuł zawodowy: **magister inżynier**, Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny, kierunek Elektronika i Telekomunikacja, kierunek dyplomowania Inżynieria Komputerowa; temat pracy magisterskiej: *Oprogramowanie CAD wspomagające projektowanie złożonych algorytmów DSP*.
- 1997 – uzyskany tytuł zawodowy: **technik elektronik**, Technikum Mechaniczno-Energetyczne, Szczecin, kierunek Elektronika.

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

- 01.01.2009–obecnie **adiunkt badawczo-dydaktyczny**, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Wydział Elektryczny, Katedra Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej
- 01.10.2006–31.12.2008 **adiunkt badawczo-dydaktyczny**, Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny, Katedra Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej
- 15.02.2006–30.09.2006 **asystent**, Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny, Katedra Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej
- 01.10.2002–14.02.2006 **studia doktoranckie, asystent stażysta**, Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny, Katedra Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej
- 01.10.2001–31.01.2002 **asystent stażysta**, Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny, Katedra Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.). Omówienie to winno dotyczyć merytorycznego ujęcia przedmiotowych osiągnięć, jak i w sposób precyzyjny określać indywidualny wkład w ich powstanie, w przypadku, gdy dane osiągnięcie jest dziełem współautorskim, z uwzględnieniem możliwości wskazywania dorobku z okresu całej kariery zawodowej

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

Zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 267 ust. 2 pkt 2 lit. b, w rozumieniu art. 219 ust. 1 pkt 2 lit. b Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce do oceny przedkładam osiągnięcie naukowe w formie jednotematycznego cyklu 13 artykułów naukowych opublikowanych w czasopismach naukowych posiadających współczynnik Impact Factor oraz w materiałach konferencyjnych indeksowanych w bazach Web of Science i Scopus pt.:

Estymacja parametrów uogólnionego rozkładu Gaussa oraz zastosowanie uogólnionego rozkładu Gaussa w przetwarzaniu sygnałów i obrazów.

4.2 Wykaz publikacji stanowiących osiągnięcie naukowe

[H1] **R. Krupiński**, “Recursive polynomial weighted median filtering,” *Signal Processing*, vol. 90, no. 11, pp. 3004–3013, 2010. doi: 10.1016/j.sigpro.2010.04.026. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168410001878>

Impact Factor 2010=1.373 (aktualnie IF 2023=3.4); MNiSW 2010=27 pkt. (aktualnie MNiSW 2024=140 pkt.); 4 cytowania wg bazy Web of Science; 5 cytowań wg bazy Scopus

[H2] **R. Krupiński**, “Modified Moment Method Estimator for the Shape Parameter of Generalized Gaussian Distribution for a Small Sample Size,” *Computer Information Systems and Industrial Management*, ser. Lecture Notes in Computer Science, K. Saeed, R. Chaki, A. Cortesi, S. Wierchoń, Eds., vol. 8104. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 420–429, 12th IFIP TC8 International Conference on Computer Information Systems and Industrial Management Applications (CISIM 2013). doi: 10.1007/978-3-642-40925-7_39

MNiSW 2013=15 pkt. (aktualnie MNiSW 2024=40 pkt.); 3 cytowania wg bazy Web of Science; 5 cytowań wg bazy Scopus

[H3] **R. Krupiński**, “Approximated fast estimator for the shape parameter of generalized Gaussian distribution for a small sample size,” *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, vol. 63, no. 2, pp. 405–411, Jun. 2015. doi: 10.1515/bpasts-2015-0046

Impact Factor 2015=1.087 (aktualnie IF 2023=1.2); MNiSW 2015=20 pkt. (aktualnie MNiSW 2024=100 pkt.); 12 cytowań wg bazy Web of Science; 13 cytowań wg bazy Scopus

[H4] **R. Krupiński**, “Reconstructed quantized coefficients modeled with generalized Gaussian distribution with exponent $1/3$,” *Image Processing & Communications*, vol. 21, no. 4, pp. 5–12, 2016.

MNiSW 2016=9 pkt.

[H5] **R. Krupiński**, “Generating Augmented Quaternion Random Variable With Generalized Gaussian Distribution,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 34 608–34 615, 2018. doi: 10.1109/ACCESS.2018.2848202

Impact Factor 2018=4.098 (aktualnie IF 2023=3.4); MNiSW 2018=25 pkt. (aktualnie MNiSW 2024=100 pkt.); 5 cytowań wg bazy Web of Science; 6 cytowań wg bazy Scopus

- [H6] **R. Krupiński**, *Modeling Quantized Coefficients with Generalized Gaussian Distribution with Exponent $1/m$, $m = 2, 3, \dots$* , ser. Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer International Publishing, 2018, vol. 659, pp. 228–237, 5th International Conference on Man–Machine Interactions (ICMMI 2017). doi: 10.1007/978-3-319-67792-7_23

MNiSW 2018=15 pkt.; 7 cytowań wg bazy Web of Science; 7 cytowań wg bazy Scopus

- [H7] **R. Krupiński**, P. Lech, M. Teclaw, K. Okarma, “Binarization of Degraded Document Images with Generalized Gaussian Distribution,” *Computational Science – ICCS 2019*, ser. Lecture Notes in Computer Science, J. M. F. Rodrigues, P. J. S. Cardoso, J. Monteiro, R. Lam, V. V. Krzhizhanovskaya, M. H. Lees, J. J. Dongarra, P. M. Sloom, Eds., vol. 11540. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 177–190, 19th Annual International Conference on Computational Science (ICCS 2019). doi: 10.1007/978-3-030-22750-0_14

MNiSW 2019=140 pkt. (aktualnie MNiSW 2024=140 pkt.); 4 cytowania wg bazy Web of Science; 7 cytowań wg bazy Scopus

Mój wkład w powstanie tej pracy stanowiły stworzenie wykorzystywanego modelu bazującego na uogólnionym rozkładzie Gaussa (GGD), stworzenie dedykowanego oprogramowania, badanie modelu GGD, przygotowanie wyników badań dla modelu GGD, przygotowanie publikacji dotyczącej części GGD. Mój udział procentowy 25%.

- [H8] **R. Krupiński**, P. Lech, K. Okarma, “Improved Two-Step Binarization of Degraded Document Images Based on Gaussian Mixture Model,” *Computational Science – ICCS 2020*, ser. Lecture Notes in Computer Science, V. V. Krzhizhanovskaya, G. Závodszy, M. H. Lees, J. J. Dongarra, P. M. A. Sloom, S. Brissos, J. Teixeira, Eds., vol. 12141. Cham: Springer International Publishing, 2020, pp. 467–480, 20th Annual International Conference on Computational Science (ICCS 2020). doi: 10.1007/978-3-030-50426-7_35

MEiN 2020=140 pkt. (aktualnie MNiSW 2024=140 pkt.); 2 cytowania wg bazy Web of Science; 3 cytowania wg bazy Scopus

Mój wkład w powstanie tej pracy stanowiły stworzenie wykorzystywanego modelu bazującego na uogólnionym rozkładzie Gaussa (GGD), stworzenie dedykowanego oprogramowania, badanie modelu GGD, przygotowanie wyników badań dla modelu GGD, przygotowanie publikacji dotyczącej części GGD, zaproponowanie wykorzystania modelu mieszaniny Gaussa (GMM), badanie modelu GMM, przygotowanie wyników badań dla modelu GMM. Mój udział procentowy 33,33%.

- [H9] **R. Krupiński**, E. Kornatowski, “The Use of Generalized Gaussian Distribution in Vibroacoustic Detection of Power Transformer Core Damage,” *Energies*, vol. 13, no. 10, May 2020. doi: 10.3390/en13102525. URL: <https://www.mdpi.com/1996-1073/13/10/2525>

Impact Factor 2020=3.004 (aktualnie IF 2023=3); MEiN 2020=140 pkt. (aktualnie MNiSW 2024=140 pkt.); 7 cytowań wg bazy Web of Science; 8 cytowań wg bazy Scopus

Mój wkład w powstanie tej pracy stanowiły koncepcja pracy, opracowanie metodologii, stworzenie wykorzystywanego modelu bazującego na uogólnionym rozkładzie Gaussa (GGD), stworzenie dedykowanego oprogramowania, badanie modelu GGD, przeprowadzenie badań symulacyjnych, przygotowanie wyników badań dla modelu GGD, przygotowanie publikacji. Mój udział procentowy 50%.

- [H10] H. Michalak, **R. Krupiński**, P. Lech, K. Okarma, “Preprocessing of Document Images Based on the GGD and GMM for Binarization of Degraded Ancient Papyri Images,” *Progress in Image Processing, Pattern Recognition and Communication Systems*, ser. Lecture Notes in Networks and Systems, M. Choraś, R. S. Choraś, M. Kurzyński, P. Trajdos, J. Pejaś, T. Hyla, Eds., vol. 255. Cham: Springer International Publishing, 2022, pp. 116–124, international Conference on Computer Recognition Systems (CORES 2021), International Conference on Image Processing and Communications (IP&C 2021), International Multi-Conference on Advanced Computer Systems (ACS 2021). doi: 10.1007/978-3-030-81523-3_11

MEiN 2022=20 pkt.; 1 cytowanie wg bazy Scopus

Mój wkład w powstanie tej pracy stanowiło zaproponowanie badań, stworzenie wykorzystywanego modelu bazującego na uogólnionym rozkładzie Gaussa (GGD), stworzenie dedykowanego oprogramowania, badanie modelu GGD, przygotowanie wyników badań dla modelu GGD, przygotowanie publikacji dotyczącej części GGD, zaproponowanie wykorzystania modelu mieszaniny Gaussa (GMM), badanie modelu GMM, przygotowanie wyników badań dla modelu GMM. Mój udział procentowy 25%.

- [H11] **R. Krupiński**, “Generalized Gaussian Distribution with Augmented Pure Quaternion Random Variable,” *2023 27th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, Międzyzdroje, Poland, Aug 2023, pp. 45–50. doi: 10.1109/MMAR58394.2023.10242425. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10242425>

MEiN 2023=20 pkt. (aktualnie MNiSW 2024=20 pkt.); 2 cytowania wg bazy Web of Science; 2 cytowania wg bazy Scopus

- [H12] **R. Krupiński**, E. Kornatowski, “Analysis of the GGD Vibroacoustic Detector of Power Transformer Core Damage,” *IEEE Access*, vol. 12, pp. 45 752–45 761, 2024. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3382114. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10479206>

Impact Factor 2023=3.4; MNiSW 2024=100 pkt.; Publikacja indeksowana w bazie Web of Science; 1 cytowanie wg bazy Scopus

Mój wkład w powstanie tej pracy stanowiły koncepcja pracy, opracowanie metodologii, stworzenie dedykowanego oprogramowania, badanie modelu GGD, przeprowadzenie badań symulacyjnych, przygotowanie wyników badań dla modelu GGD, przygotowanie publikacji. Mój udział procentowy 50%.

- [H13] **R. Krupiński**, T. Marciniak, O. O. Oyerinde, “Maximum Likelihood Estimators of Generalized Gaussian Distribution With an \mathbb{H} -Proper Quaternion Random Variable,” *IEEE Access*, vol. 12, pp. 72 445–72 457, 2024. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3403892. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10535510>

Impact Factor 2023=3.4; MNiSW 2024=100 pkt.; Publikacja indeksowana w bazach Web of Science i Scopus

Mój wkład w powstanie tej pracy stanowiły koncepcja pracy, opracowanie metodologii, opracowanie metody bazującej na uogólnionym rozkładzie Gaussa (GGD), stworzenie dedykowanego oprogramowania, badanie metody ML, przeprowadzenie badań symulacyjnych, przygotowanie wyników badań dla modelu GGD, przygotowanie publikacji. Mój udział procentowy 33,33%.

Wykaz artykułów naukowych dotyczących wskazanego osiągnięcia obejmuje 13 pozycji (oznaczone od [H1] do [H13]), w tym 7 w postaci publikacji w recenzowanych czasopismach naukowych, takich jak: *Signal Processing* (2010), *Bulletin of the Polish Academy of Sciences* (2015), *Image Processing & Communications* (2016), *IEEE Access* (2018, 2024 × 2), *Energies* (2020) oraz 6 pozycji w recenzowanych materiałach konferencji międzynarodowych: *Lecture Notes in Computer Science (IFIP International Conference on Computer Information Systems and Industrial Management, CISIM 2013; International Conference on Computational Science, ICCS 2019; ICCS 2020)*, *Advances in Intelligent Systems and Computing (International Conference on Man-Machine Interactions, ICMMI 2017)*, *Lecture Notes in Networks and Systems (International Multi-Conference on Advanced Computer Systems, 2021)* i *International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR, 2023)*. Na osiągnięcie to składa się 6 artykułów zamieszczonych w czasopismach o ustalonej wartości Impact Factor (IF), które w roku opublikowania artykułu w ostatecznej formie były ujęte w wykazie sporządzonym zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 267 ust. 2 pkt 2 lit. b ustawy. Wśród nich największy współczynnik wpływu IF=4.098 ma czasopismo *IEEE Access*. 6 prac zawartych w cyklu posiada IF mieszczący się w przedziale od 1.087 do 4.098. Łączny IF cyklu publikacji wynosi 16.362. Sumaryczny IF cyklu publikacji naukowych według listy *Journal Citation Reports (JCR)* zgodnie z rokiem publikacji i z uwzględnieniem wkładu autorów wynosi 10.893, natomiast sumaryczna punktacja ministerialna czasopism, w których zostały opublikowane prace do 2018 roku wynosi 111, w latach od 2019 do 2023 wynosi 460, a od roku 2024 wynosi 200. Sumaryczna liczba punktów dorobku cyklu według MNiSW

(MEiN) zgodnie z rokiem publikacji i z uwzględnieniem wkładu autorów do 2018 roku wynosi 111, w latach od 2019 do 2023 wynosi 176.67, a od roku 2024 wynosi 83.33.

7 prac jest samodzielnych, a pozostałe prace (6) wieloautorskie, a liczba osób zaangażowanych w ich powstanie wynosiła od 2 do 4. We wszystkich pracach wieloautorskich, poza jednym przypadkiem [H10], występuję w nich jako pierwszy autor. We wszystkich wykazanych pracach wieloautorskich byłem twórcą wykorzystywanego modelu bazującego na uogólnionym rozkładzie Gaussa (ang. generalized Gaussian distribution, GGD), stworzyłem dedykowane oprogramowanie, wykonałem badania dla tego modelu, a także przygotowałem wyniki badań dla wykorzystywanego modelu. Ponadto, w ramach każdej z tych współautorskich prac:

[H8] w dalszych pracach nad binaryzacją dokumentów cyfrowych, w związku z obserwacją występowania więcej modów w histogramie dla analizowanych obrazów, zaproponowałem wykorzystanie modelu mieszaniny Gaussa (ang. Gaussian Mixture Model - GMM), stworzyłem dedykowane oprogramowanie, wykonałem badania dla tego modelu, a także przygotowałem wstępne zestawy progów do binaryzacji dla wszystkich rozpatrywanych obrazów dokumentów cyfrowych; zestawy te zostały poddane analizie przez pozostałych współautorów,

[H10] modele z prac [H7, H8] zaproponowałem zastosować do innego rodzaju zdjęć dokumentów cyfrowych, tj. do zdjęć starodawnych papirusów, dostosowałem modele bazujące na GMM i GGD, wykonałem badania dla tych modeli, a także przygotowałem wstępne zestawy progów do binaryzacji dla wszystkich rozpatrywanych obrazów dokumentów cyfrowych; zestawy te zostały poddane analizie przez pozostałych współautorów.

Prezentowany cykl wpisuje się w podstawowy warunek monotematyczności, wszystkie wskazane prace mieszczą się w określonym obszarze tematycznym dotyczącym estymacji parametrów uogólnionego rozkładu Gaussa oraz wykorzystaniu tego rozkładu w przetwarzaniu sygnałów i obrazów. W dalszej części dokumentu zostanie wskazane jak pozycje cyklu łączą się w monotematyczne osiągnięcie naukowe, czyli jak badania raportowane w oddzielnych publikacjach uzupełniają się łącząc w jeden raport dotyczący podjętych monotematycznych badań. W treści opisowej znajdują się odwołania do wszystkich 13 pozycji cyklu. Przedstawione osiągnięcie naukowe jest podsumowaniem wyników badań prowadzonych w Zachodniopomorskim Uniwersytecie Technologicznym w Szczecinie. Badania do pracy [H13] prowadzone były na Wydziale Telekomunikacji, Informatyki i Elektrotechniki Politechniki Bydgoskiej.

Istotą prowadzonych przeze mnie badań było opracowanie nowych metod estymacji parametrów rozkładów będących szczególnymi przypadkami uogólnionego rozkładu Gaussa [H4, H6], a także nowych metod estymacji parametru kształtu uogólnionego rozkładu Gaussa [H2, H3]. W badaniach skupiono się również na opracowaniu metody generowania zmiennej losowej kwaternionu rozszerzonego o uogólnionym rozkładzie Gaussa [H5, H11] oraz estymacji parametrów uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej kwaternionu \mathbb{H} -właściwego [H13]. Opracowane narzędzia zostały wykorzystane w badaniach polegających na modelowaniu i analizie obrazów [H7, H8, H10], a także sygnałów wibroakustycznych [H9, H12]. W badaniach nad redukcją addytywnego szumu o uogólnionym rozkładzie Gaussa została opracowana nowa technika filtracji adaptacyjnej [H1]. W części podsumowującej (Punkt 4.3.11) zestawiono najważniejsze oryginalne wyniki, które zrealizowano w ramach przedstawionego osiągnięcia habilitacyjnego.

4.3 Omówienie osiągnięcia naukowego

4.3.1 Wprowadzenie

W ostatnich latach zaobserwować można coraz bardziej popularne zastosowanie różnorodnych metod statystycznego przetwarzania sygnałów i obrazów. W związku z tym pojawia się potrzeba zaprojektowania narzędzi do wyznaczania parametrów obserwowanych procesów, jak również potrzeba generowania procesów o zadanych parametrach modelu. Jest to nie tylko kierunek dynamicznego rozwoju współczesnej automatyki i robotyki, ale zdecydowanie większej liczby dziedzin.

Jednym z takich modeli, który zdobył zainteresowanie naukowców, jest uogólniony rozkład Gaussa. GGD jest często używany do scharakteryzowania statystycznego zachowania sygnału multimedialnego [1]. Za pomocą tego rozkładu prawdopodobieństwa można modelować różne typy sygnałów w aplikacjach przetwarzania obrazów i sygnałów. GGD występuje w literaturze także pod innymi nazwami: wykładniczy rozkład potęgowy (ang. exponential power distribution, EPD) (nazywany także rozkładem Box-Tiao [2]), uogólniony rozkład błędu (ang. generalized error distribution, GED), rozkład Subbotina i uogólniony rozkład normalny (ang. generalized normal distribution, GND).

Rozkłady eliptycznie symetryczne (ES) obejmują rozkład Gaussa, uogólniony rozkład Gaussa i wszystkie złożone rozkłady Gaussa [3]. GGD jest również szczególnym przypadkiem uogólnionego rozkładu gamma (GFD) [4]. Song [5] porównał te dwa rozkłady.

Popularność rozkładu GGD znajduje odzwierciedlenie w wielu zastosowaniach. GGD znalazł zastosowanie m.in. w modelowaniu współczynników różnych transformacji, np. współczynników dyskretnej transformaty kosinusowej (ang. discrete cosine transform, DCT), współczynników dyskretnej transformaty sinusowej (ang. discrete sine transform, DST) oraz współczynników transformaty Walsh-Hadamarda (ang. Walsh-Hadamard transform, WHT) [6]. Współczynniki DCT stosowane są w aktualnych standardach kompresji wideo (MPEG) i obrazów (JPEG) [7]. Müller [8] porównał statystykę Chi-kwadrat dla GGD i rozkładu Laplace'a współczynników AC¹ DCT obrazów naturalnych i stwierdził, że GGD najlepiej pasuje do współczynników DCT wszystkich obrazów. Westerink i in. [9] modelowali współczynniki za pomocą GGD o różnych parametrach kształtu dla wyższych częstotliwości i dla podpasma o niższej częstotliwości. Aiazzi i in. [10] modelowali podpasma częstotliwości obrazów „Lenna” i „Baboon” za pomocą GGD. Sharifi i Leon-Garcia [11] zastosowali GGD do 16 podpasem częstotliwości oryginału i klatek różnicowych sekwencji wideo. GGD został zastosowany do statystycznego modelowania współczynników DCT oryginalnego obrazu w celu wykorzystania w technice znaków wodnych do ochrony praw autorskich obrazów cyfrowych [12]. Rozkład GGD został użyty w algorytmie segmentacji obrazu opartego na transformacie falkowej [13]. Achim i in. [14] modelowali współczynniki transformaty falkowej obrazu ultrasonograficznego za pomocą uogólnionej gęstości Laplace'a. Połączenie transformaty falkowej i modelu GGD znalazło zastosowanie w przypadku wyszukiwania tekstur [4, 15, 16] oraz klasyfikacji tekstur [17]. Lavu i in. [18] zastosowali GGD w kompresji danych trójwymiarowej siatki trójkątów. W pracy [19] na podstawie właściwości statystycznych obrazów naturalnych został uzyskany model statystyki naturalnej sceny (ang. natural scene statistics, NSS). Zostało to osiągnięte za pomocą GGD i asymetrycznego GGD (ang. asymmetric GGD, AGGD). Aproksymacja jądra funkcji rozproszenia punktu atmosfery (ang. atmosphere point spread function, APSF) została wykorzystana do zaproponowania wydajnej metody usuwania zamglenia z pojedynczego obrazu [20]. W procedurze tej został wykorzystany rozkład GGD. Bazując na GGD do początkowej syntezy obrazu twarzy wprowadzono więcej szczegółów. Zostało to pokazane w pracy [21]. Natomiast w pracy [22] zostało opracowane narzędzie oceny jakości obrazu stereoskopowego wykorzystując GGD do modelowania statystycznych właściwości obrazu stereoskopowego w oparciu o współczynniki podzakresów przeorganizowanej dyskretnej transformacie kosinusowej (ang. reorganized discrete cosine transform, RDCT). Kasaei i in. [23] przedstawili nowy algorytm kompresji obrazów odcisków palców bazujący na transformacie falkowej i GGD. Zastosowanie GGD do odsumiania obrazu zostało przedstawione w pracach [24, 25]. Badania dotyczące GGD w obszarze zastosowania do znaków wodnych obrazów (ang. image watermarking) zostały przedstawione w [26, 27]. Wykrywanie zmian w obrazach radarowych z syntetyczną aperturą (ang. synthetic aperture radar (SAR) images) w oparciu o GGD zostało pokazane w pracach [28, 29]. Współczynniki transformaty Gabora zostały wykorzystane w algorytmie rozpoznawania twarzy [30]. Gazor i Zhang [31] zbadali rozkład próbek mowy. Przetestowali GGD z parametrem kształtu równym $p = 0.44$ dla współczynników transformaty DCT i Karhunen-Loève'a sygnału mowy. W pracach [32, 33] autorzy przyjęli GGD, aby scharakteryzować rozkłady błędów w procesie udoskonalenia sygnału mowy. Zheng i in. [34] zaproponowali algorytm uczenia słownikowego (ang. dictionary learning, DL) dla sygnałów z szumem addytywnym o rozkładzie GGD poprzez przeprojektowanie trzech kluczowych komponentów używanych w DL dla sygnałów Gaussa: (i) algorytmu dopasowywania ortogonalnego, (ii) przybliżonego algorytmu K-SVD oraz (iii) kryterium teoretycznego informacji. Wang i in. [35] wykorzystali GGD do utworzenia modelu zniekształceń dla kodera wideo H.266/VVC. Che i in. [36] w ultra szerokopasmowo-

¹Współczynnik składowej zmiennej (ang. alternating current)

wym (ang. ultra-wideband, UWB) systemie wewnętrznego pozycjonowania (ang. Indoor Positioning System, IRS) zastosowali GGD do identyfikacji sygnałów poza zasięgiem wzroku (ang. nonline-of-sight, NLoS). Dhandapani i in. [37] wdrożyli GGD w metodzie detekcji uszkodzeń łożysk. Takie samo zastosowanie opracowali Tao i in. [38] korzystając dodatkowo z transformaty falkowej. Aiba i in. [39] badali system wykrywania anomalii akustycznych urządzeń i zaproponowali proces ekstrakcji źródła dźwięku bazujący na GGD. Banerjee i in. [40] wykorzystali GGD w celu poprawy podwodnej komunikacji akustycznej (ang. underwater acoustic, UWA). W pracy [41] badano modelowanie danych sekwencjonowania egzomu, gdzie losowy błąd sekwencjonowania jest zgodny z uogólnionym rozkładem Gaussa. Funkcja probabilistyczna będąca mieszaniną uogólnionych rozkładów Gaussa została zbudowana w celu przewidywania awarii maszyn wirujących [42]. Liu i in. [43] zaproponowali klasyfikatory probabilistyczne wykorzystujące GGD. Natomiast GGD do modelowania zakłóceń wielodostępowych w systemach o ultraszerokim paśmie został zastosowany w [44]. W [45] rozważano detektor oparty na splotowych sieciach neuronowych (ang. convolutional neural networks, CNN) do rozwiązywania problemów wykrywania widma (ang. spectrum sensing, SS) przy różnych modelach szumu (między innymi izometrycznym CGGD).

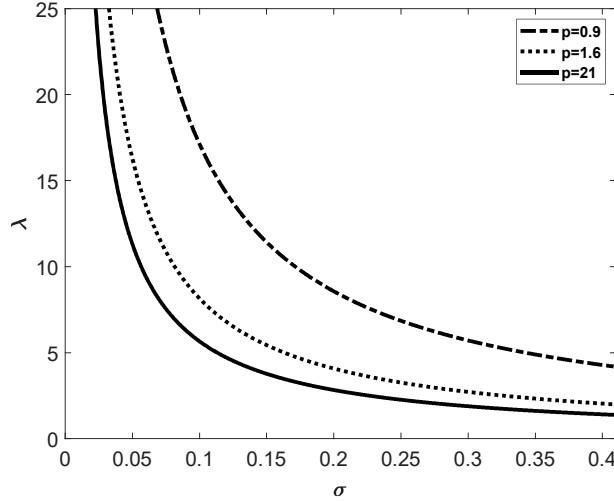
Wielowymiarowy uogólniony rozkład Gaussa (ang. multivariate generalized Gaussian distribution, MGGD) cieszy się dużym zainteresowaniem w zastosowaniach przetwarzania sygnałów i obrazów ze względu na jego parametryczną formę. W literaturze występuje również pod nazwą ang. multivariate power-exponential distribution [46, 47]. Problem estymacji parametrów MGGD metodą największej wiarygodności został omówiony w [48, 49]. W pracy [50] wprowadzono uśredniony algorytm punktu stałego Riemanna (ang. Riemannian averaged Fixed-Point) estymacji parametrów.

W [51] wprowadzono nienadzorowany klasyfikator oparty na modelu mieszanek skończonych z wykorzystaniem wielowymiarowego uogólnionego rozkładu Gaussa. Klasyfikator ten zastosowano do zestawu danych radiograficznych obrazów defektów spawalniczych. Aby osiągnąć terminowe i dokładne wykrywanie uskoków w odwiercie, zaproponowano systematyczną metodę wykrywania uskoków w oparciu o MGGD i dywergencję Kullbacka-Leiblera (ang. Kullback Leibler Divergence, KLD) [52, 53].

Opracowano wiele metod estymacji parametrów różnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Najbardziej powszechnym podejściem jest użycie estymatorów największej wiarygodności (ang. maximum likelihood, ML). Funkcja największej wiarygodności i estymatory są omówione w [54, 55, 56, 57].

Najpopularniejszą metodą estymacji parametru kształtu GGD jest właśnie metoda największej wiarygodności [58]. Jest to jednak metoda złożona i czasochłonna. Metoda momentów (ang. moment method, MM) [59] jest również bardzo popularną metodą stosowaną do estymacji parametru kształtu rozkładu GGD. Najpopularniejszym podejściem jest ustawienie dwóch momentów na wartości $m_1 = 1$ i $m_2 = 2$ (metoda Mallata), ale wykorzystuje się również momenty wyższego rzędu. Moment czwartego rzędu został wykorzystany jako wartość początkowa iteracji Newtona-Raphsona do estymacji parametrów zespolonego rozkładu GGD [60]. W pracy [14] parametr oszacowano z drugiego i czwartego momentu danych (odpowiednio wariancja rozkładu i kurtoza). Estymator Mallata wykorzystali Birney i Fischer [61]. Utworzyli tabelę przeglądową w celu odwrócenia $F(x)$ w celu rozwiązania parametru kształtu z rozsądną precyzją. Implementacja programowa bazowała na tabeli zawierającej 10 000 punktów, aby uwzględnić wartości parametru kształtu od 0.1 do 2.05. Sharifi i Leon-Garcia [11] także oszacowali parametr kształtu GGD metodą Mallata, używając tablicy przeglądowej, w której przechowywane były wartości $F(x)$ dla skwantyzowanych wartości parametru kształtu. W tablicy przeglądowej znajdowało się 180 wpisów dla 180 różnych wartości parametru kształtu z zakresu $< 0.2, 2 >$ o wielkości kroku równej 0.01. Joshi i Fischer [62] porównali estymatory parametru kształtu GGD przedstawione przez Mallata [59] i Du [58]. Stwierdzili, że metoda zaproponowana przez Mallata była znacznie mniej złożona obliczeniowo. Gazor i Zhang [31] wykorzystali metodę Mallata do oszacowania parametru kształtu i doszli do wniosku, że obliczenie $F^{-1}(x)$ było złożone i czasochłonne w aplikacjach czasu rzeczywistego, takich jak programy do przetwarzania mowy. Jednak metoda Mallata nie jest dokładna dla całego zakresu parametru kształtu [63], co zostało przedstawione w badaniach przed doktoratem. Dostępna jest również metoda oparta na dopasowaniu entropii [10], zaś dopasowanie za pomocą negentropii zostało wprowadzone przez Prasada i in. [64]. Opracowano wiele metod estymacji parametrów GGD, a porównanie różnych podejść do estymacji parametru kształtu omówiono w [65].

Ponieważ metoda ML stosowana do estymacji parametru kształtu jest złożona i czasochłonna, w ba-



Rysunek 1: Relacja (2) pomiędzy λ i σ dla uogólnionego rozkładu Gaussa

daniach przed doktoratem opracowano metodę jednego momentu (ang. one moment, OM) [66] ze zredukowaną złożonością. Dalszą redukcję złożoności obliczeniowej uzyskano poprzez wprowadzenie szybkiego aproksymowanego estymatora parametru kształtu GGD dla aplikacji czasu rzeczywistego [63]. Metoda oparta na aproksymacji metody momentu w czterech przedziałach pozwala na szybkie oszacowanie parametru kształtu GGD i wymaga zapamiętania zaledwie dwunastu współczynników. Metoda aproksymuje estymowany parametr kształtu GGD w przedziale 0.3 – 3.

Symulacje niezbędne do walidacji i porównania estymatorów wymagają konfigurowalnego generatora GGD. Procedura generowania zmiennej losowej dla GGD została opisana w [67].

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej GGD opisana jest wzorem [6, 58]

$$f(x) = \frac{\lambda(p, \sigma) \cdot p}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} e^{-[\lambda(p, \sigma) \cdot |x - \mu|]^p}, \quad (1)$$

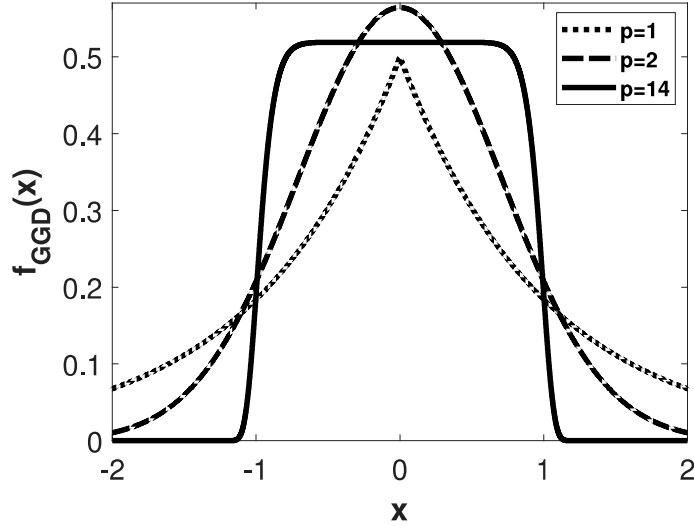
gdzie $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $z > 0$ jest funkcją gamma [68], p jest parametrem kształtu, μ to parametr lokalizacji oraz λ powiązana jest z wariancją rozkładu według następującej zależności

$$\lambda(p, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \right]^{0.5}, \quad (2)$$

gdzie σ oznacza odchylenie standardowe. Zmiany wartości λ w zależności od zmiany wartości odchylenia standardowego σ dla różnych parametrów p przedstawiono na rysunku 1. Na podstawie wykresów można zauważyć, że wraz ze wzrostem wariancji rozkładu GGD wartość parametru λ maleje. Zatem małe wartości λ oznaczają wyższą wartość wariancji.

Uogólniony rozkład Gaussa swoją popularność zawdzięcza temu, że obejmuje różne inne rozkłady prawdopodobieństwa. Zakres ten obejmuje rozkłady od rozkładu impulsowego po rozkład równomierny. GGD obejmuje szczególne przypadki, gdy parametr kształtu jest równy $p = 1$ i $p = 2$. Odpowiada to odpowiednio rozkładowi Laplace'a i Gaussa. Dla $p \rightarrow \infty$ funkcja gęstości $f(x)$ dąży do rozkładu jednostajnego, a dla $p \rightarrow 0$ funkcja $f(x)$ zbliża się do funkcji impulsowej. Ponieważ w literaturze analizowane były sygnały o rozkładzie GGD dla $p < 1$, dlatego Chapeau-Blondeau i Monir [69] zaproponowali dodatkowo model dla $p = 0.5$. Ograniczając się do szczególnych przypadków, można wyznaczyć równania w postaci jawnej i uprościć analizę. Dla $\mu = 0$ funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest skupiona wokół zera.

Funkcję gęstości GGD dla różnych parametrów kształtu p przedstawiono na rysunku 2.



Rysunek 2: Funkcja gęstości GGD dla $\lambda = 1$ dla trzech wybranych parametrów kształtu $p = 1$, $p = 2$ i $p = 14$

Model (równanie (1), dla $\mu = 0$) wymaga estymacji dwóch parametrów p i λ (lub σ). Dla uproszczenia obliczeń ograniczając się do wybranego przypadku szczególnego rozkładu GGD dla ustalonej wartości p wymagana jest wtedy estymacja tylko jednego parametru λ (lub σ).

Du [58] podał estymację parametru kształtu metodą największej wiarygodności

$$\frac{\Psi(1 + \frac{1}{p}) + \log(p)}{p^2} + \frac{1}{p^2} \log \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right) - \frac{\sum_{i=1}^N |x_i|^p \log(|x_i|)}{p \sum_{i=1}^N |x_i|^p} = 0, \quad (3)$$

gdzie $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log(\Gamma(x))$ jest funkcją digamma [68]. Pierwiastek z równania (3) daje oszacowanie \hat{p} metodą ML. Równanie (3) rozwiązuje się numerycznie ze względu na p . Jest to najbardziej popularna metoda wyznaczania parametru kształtu p rozkładu GGD.

Absolutny moment rzędu m

$$E[|X|^m] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^m \cdot f(x) dx \quad (4)$$

dla rozkładu GGD opisany jest równaniem [70]

$$E_m = E[|X|^m] = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{p}\right)}{\lambda(p, \sigma)^m \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}, \quad (5)$$

gdzie m może być liczbą rzeczywistą. Estymowaną wartość momentu E_m można uzyskać z równania

$$\hat{E}_m = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N |x_i|^m, \quad (6)$$

gdzie N oznacza liczbę obserwowanych zmiennych, a $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ to zbiór N niezależnych i identycznie rozłożonych zmiennych losowych o średniej zerowej.

W metodzie momentów wykorzystany jest wzór na absolutny moment rzędu m rozkładu GGD (równanie (5)), gdzie m może być wartością rzeczywistą. Równanie (5) dla dwóch różnych wartości

momentów m_1 i m_2 i po wyeliminowaniu λ prowadzi do:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m_2+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{m_2}{m_1}-1}}{\Gamma\left(\frac{m_1+1}{p}\right)^{\frac{m_2}{m_1}}} = \frac{E_{m_2}}{(E_{m_1})^{\frac{m_2}{m_1}}}, \quad (7)$$

co stanowi metodę estymacji parametru kształtu rozkładu GGD na podstawie dwóch momentów. Z równania tego należy numerycznie wyznaczyć p , co stanowi estymację parametru kształtu \hat{p} metodą MM.

W badaniach przed doktoratem przedstawiono model [63] przybliżonej estymacji parametru kształtu GGD, który bazuje na metodzie dwóch momentów i jest obliczany dla wybranych przedziałów związanych z parametrem kształtu

$$\hat{p} = \left(\frac{\log(Gp) - a}{b}\right)^{\frac{1}{c}}, \quad (8)$$

gdzie

$$Gp = \frac{E_{m_1}}{(E_{m_2})^{\frac{m_1}{m_2}}}, \quad (9)$$

i \hat{p} oznacza oszacowaną wartość parametru kształtu, E_{m_1} i E_{m_2} to oszacowane wartości momentów, które można wyznaczyć z równania (6). Parametry a , b i c są ustawiane niezależnie dla każdego przedziału, a zarówno ich wartości, jak i procedurę ich wyboru omówiono w [63].

Parametr λ również można wyznaczyć metodą ML. Najpierw należy znaleźć funkcję największej wiarygodności dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa (1), wyznaczyć jej logarytm i zmaksymalizować ją względem λ . Po odpowiednich przekształceniach można otrzymać estymator największej wiarygodności:

$$\lambda = \left(\frac{N}{p \cdot \sum_{i=1}^N |x_i|^p}\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (10)$$

Parametr λ wyznacza się metodą ML dla znanego parametru kształtu p , gdzie p należy wcześniej wyznaczyć inną metodą, np. (3).

4.3.2 Filtr adaptacyjny redukujący szum addytywny o uogólnionym rozkładzie Gaussa

Podczas prac badawczych została wprowadzona nowa klasa filtrów cyfrowych [H1]: rekurencywne filtry wielomianowe medianowe ważone (ang. recursive polynomial weighted median, RPWM). Wprowadzona technika filtracji została oparta o filtrację wielomianową, rekurencywną filtrację wielomianową, filtrację medianową ważoną (ang. weighted median, WM) i filtrację wielomianową medianową ważoną (ang. polynomial weighted median, PWM). Szczególny przypadek filtrów RPWM drugiego rzędu został poddany dokładnej analizie. Zostały również wprowadzone równania na filtr adaptacyjny z aktualizacją wag filtru, a także wzory dla adaptacji wag filtru dla przypadku nieujemnych całkowitych wag składowych filtrów medianowych ważonych.

Filtr medianowy

Filtry medianowe są bardzo popularne i mają szerokie zastosowanie w wielu obszarach badawczych. Właściwości filtrów medianowych przedstawili Pitas i Venetsanopoulos [71]. Omówili filtry medianowe ważone, a także rekurencyjne filtry medianowe. Właściwości statystyczne filtrów medianowych, medianowych ważonych i stosowych zostały również omówione w [72]. Zachowanie zbieżności różnych schematów rekurencyjnych filtrów medianowych oraz algorytmy przetwarzania obrazów przy użyciu tych filtrów zostały zbadane w pracy [73].

Ogólna struktura filtru medianowego ważonego dopuszczającą dodatnie i ujemne wagi rzeczywiste opisana jest wzorem [74]

$$y = MED(|h_i| \diamond \text{sgn}(h_i)x_i|_{i=1}^N) \quad (11)$$

gdzie $h_i \in R$ dla $i = 1, 2, \dots, N$ oraz \diamond jest operatorem replikacji zdefiniowany jako $h_i \diamond x_i = [x_i, x_i, \dots, x_i]$, gdzie x_i jest replikowany h_i razy. $\text{sgn}(x) = 1$ dla $x > 0$, $\text{sgn}(x) = 0$ dla $x = 0$ i $\text{sgn}(x) = -1$ dla $x < 0$. x_1, x_2, \dots, x_N jest zbiorem N niezależnych próbek. Procedura postępowania w przypadku wag niecałkowitych została podana w [74].

Filtr wielomianowy

Klasa systemów nieliniowych, niezmienniczych z przesunięciem z pamięcią opartych na dyskretnym szeregu Voltery zostały przedstawione w pracy [71].

Relacja wejście–wyjście dla tej klasy systemów opisana jest wzorem [71]

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{h}_k[x_i], \quad (12)$$

gdzie y_i jest wyjściem, a $\bar{h}_k[x_i]$ jest zdefiniowane jako

$$\bar{h}_k[x_i] = \sum_{i_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{N-1} h_k(i_1, \dots, i_k) x_{i-i_1} \cdots x_{i-i_k} \quad (13)$$

i $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-N+1}$ reprezentuje N próbek wejściowych. Dla $k = 1$ wyrażenie $h_1(i_1)$ jest zwykłą liniową odpowiedzią impulsową. Nieliniowe zachowanie filtra można scharakteryzować jako $h_k(i_1, \dots, i_k)$, co można uznać za skończoną odpowiedź impulsową k -tego rzędu.

Filtr wielomianowy drugiego rzędu można opisać wzorem

$$y_i = \sum_{i_1=0}^{N-1} h_1(i_1) x_{i-i_1} + \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} h_2(i_1, i_2) x_{i-i_1} x_{i-i_2}. \quad (14)$$

Wyjście filtra, eliminując nadmiarowe składniki $h_2(i_1, i_2)$ i jawnie pokazując zależności od składników liniowych, krzyżowych i kwadratowych, można przedstawić w następujący sposób

$$\begin{aligned} y_i = & C_1 \cdot \sum_{i_1=0}^{N-1} h_1(i_1) x_{i-i_1} + \\ & C_{2,1} \cdot \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{N-1} h_{2,1}(i_1, i_2) x_{i-i_1} x_{i-i_2} + , \\ & C_{2,2} \cdot \sum_{i_1=0}^{N-1} h_{2,2}(i_1) x_{i-i_1}^2 \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie $C_1, C_{2,1}$ i $C_{2,2}$ są stałymi [75] oraz $h_1, h_{2,1}$ i $h_{2,2}$ to odpowiednio liniowe, krzyżowe i kwadratowe współczynniki filtra.

Filtr wielomianowy medianowy ważony

Filtry wielomianowe medianowe ważne (PWM) zostały wprowadzone przez Barnera i Aysala [76]. Zastosowanie tej klasy filtrów do przewidywania sekwencji obrazów zostało zaprezentowane w [77].

Filtr wielomianowy medianowy ważony jest zdefiniowany przez zastąpienie operatorów sumy ważonej w równaniu (15) operatorami mediany ważonej (równanie (11)) [76]

$$\begin{aligned} y_i = & C_1 \cdot MED \left(|h_1(i_1)| \diamond \text{sgn}(h_1(i_1)) x_{i-i_1} \Big|_{i_1=0}^{N-1} \right) + \\ & C_{2,1} \cdot MED \left(|h_{2,1}(i_1, i_2)| \diamond \text{sgn}(h_{2,1}(i_1, i_2)) x_{i-i_1} x_{i-i_2} \Big|_{i_1=0}^{N-1} \Big|_{i_2=i_1+1}^{N-1} \right) + . \\ & C_{2,2} \cdot MED \left(|h_{2,2}(i_1)| \diamond \text{sgn}(h_{2,2}(i_1)) x_{i-i_1}^2 \Big|_{i_1=0}^{N-1} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Filtr PWM redukuje się do tradycyjnego filtra WM dla $C_1 = 1, C_{2,1} = 0$ i $C_{2,2} = 0$.

Filtr PWM można wyrazić w formie bardziej zwartej jako

$$y = C_1 \langle \mathbf{h}_1 \rangle + C_{2,1} \langle \mathbf{h}_{2,1} \rangle + C_{2,2} \langle \mathbf{h}_{2,2} \rangle \quad (17)$$

używając notacji z [78], gdzie $\langle \mathbf{h} \rangle \equiv MED(|\mathbf{h}| \diamond \text{sgn}(\mathbf{h})\mathbf{x})$ oraz

$$\mathbf{x}_1 = [x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-N+1}],$$

$$\mathbf{x}_{2,1} = [x_i x_{i-1}, x_i x_{i-2}, \dots, x_i x_{i-N+1}, x_{i-1} x_{i-2}, \dots, x_{i-N+2} x_{i-N+1}]$$

$$\text{i } \mathbf{x}_{2,2} = [x_i^2, x_{i-1}^2, \dots, x_{i-N+1}^2]$$

są odpowiednio wektorami wartości pierwszego rzędu, wartości krzyżowych i kwadratowych. Odpowiednie wektory wazone związane z tymi składnikami są oznaczone jako \mathbf{h}_1 , $\mathbf{h}_{2,1}$ i $\mathbf{h}_{2,2}$. Wyjście filtru PWM jest liniową kombinacją wyjść podfiltrów WM, tj., $y = y_1 + y_{2,1} + y_{2,2}$, gdzie $y_1 = C_1 \langle \mathbf{h}_1 \rangle$, $y_{2,1} = C_{2,1} \langle \mathbf{h}_{2,1} \rangle$ i $y_{2,2} = C_{2,2} \langle \mathbf{h}_{2,2} \rangle$.

Rekursywny filtr wielomianowy

Relacja wejście–wyjście dla klasy systemów nieliniowych, niezmienniczych z przesunięciem z pamięcią opartych na dyskretnym szeregu Voltery z uwzględnieniem przeszłych próbek wyjściowych opisana jest wzorem

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{g}_k[x_i, y_i], \quad (18)$$

gdzie y_i jest wyjściem i \bar{g}_k zdefiniowane jest jako

$$\bar{g}_k[x_i, y_i] = \sum_{d=1}^{k+1} \sum_{i_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{N-1} \sum_{i_d=1}^M \cdots \sum_{i_k=1}^M g_{k,d}(i_1, \dots, i_k) \prod_{m=1}^{d-1} x_{i-i_m} \prod_{m=d}^k y_{i-i_m} \quad (19)$$

oraz $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-N+1}$ reprezentuje N próbek wejściowych i $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-M}$ reprezentuje M przeszłych próbek wyjściowych.

Rekursywny filtr wielomianowy drugiego rzędu można opisać wzorem

$$y_i = \bar{g}_1[x_i, y_i] + \bar{g}_2[x_i, y_i], \quad (20)$$

gdzie

$$\bar{g}_1[x_i, y_i] = \sum_{i_1=1}^M g_{1,1}(i_1) y_{i-i_1} + \sum_{i_1=0}^{N-1} g_{1,2}(i_1) x_{i-i_1} \quad (21)$$

i

$$\begin{aligned} \bar{g}_2[x_i, y_i] = & \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M g_{2,1}(i_1, i_2) y_{i-i_1} y_{i-i_2} + \\ & \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=1}^M g_{2,2}(i_1, i_2) x_{i-i_1} y_{i-i_2} + \cdot \\ & \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} g_{2,3}(i_1, i_2) x_{i-i_1} x_{i-i_2} \end{aligned} \quad (22)$$

Nadmiarowe składniki $g_{2,1}(i_1, i_2)$ i $g_{2,3}(i_1, i_2)$ mogą zostać wyeliminowane pokazując zależności od składników krzyżowych ($g_{2,1,1}(i_1, i_2)$ i $g_{2,3,1}(i_1, i_2)$) i składników kwadratowych ($g_{2,1,2}(i_1)$ i $g_{2,3,2}(i_1)$). Dlatego rekursywny filtr wielomianowy drugiego rzędu z wyeliminowanymi składnikami nadmiarowymi można zapisać następująco

$$\begin{aligned} y_i = & C_{1,1} \cdot \sum_{i_1=1}^M g_{1,1}(i_1) y_{i-i_1} + C_{1,2} \cdot \sum_{i_1=0}^{N-1} g_{1,2}(i_1) x_{i-i_1} + \\ & C_{2,1,2} \cdot \sum_{i_1=1}^M g_{2,1,2}(i_1) y_{i-i_1}^2 + C_{2,1,1} \cdot \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=i_1+1}^M g_{2,1,1}(i_1, i_2) y_{i-i_1} y_{i-i_2} + \\ & C_{2,2} \cdot \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=1}^M g_{2,2}(i_1, i_2) x_{i-i_1} y_{i-i_2} + \\ & C_{2,3,2} \cdot \sum_{i_1=0}^{N-1} g_{2,3,2}(i_1) x_{i-i_1}^2 + C_{2,3,1} \cdot \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{N-1} g_{2,3,1}(i_1, i_2) x_{i-i_1} x_{i-i_2} \end{aligned}, \quad (23)$$

gdzie $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1,1}$, $C_{2,1,2}$, $C_{2,2}$, $C_{2,3,1}$ i $C_{2,3,2}$ są stałymi oraz $g_{1,1}$, $g_{1,2}$ są liniowymi współczynnikami filtru; $g_{2,1,1}$, $g_{2,2}$, $g_{2,3,1}$ są krzyżowymi współczynnikami filtru i $g_{2,1,2}$, $g_{2,3,2}$ są kwadratowymi współczynnikami filtru.

Rekursywny filtr wielomianowy medianowy ważony

Rekursywny filtr wielomianowy medianowy ważony jest zdefiniowany przez zastąpienie operatorów sumy ważonej w równaniu (23) operatorami mediany ważonej (równanie (11)) [H1]

$$\begin{aligned}
y_i = & C_{1,1} \cdot MED(|g_{1,1}(i_1)| \diamond \operatorname{sgn}(g_{1,1}(i_1)) y_{i-i_1}|_{i_1=1}^M) + \\
& C_{1,2} \cdot MED(|g_{1,2}(i_1)| \diamond \operatorname{sgn}(g_{1,2}(i_1)) x_{i-i_1}|_{i_1=0}^{N-1}) + \\
& C_{2,1,2} \cdot MED(|g_{2,1,2}(i_1)| \diamond \operatorname{sgn}(g_{2,1,2}(i_1)) y_{i-i_1}^2|_{i_1=1}^M) + \\
& C_{2,1,1} \cdot MED(|g_{2,1,1}(i_1, i_2)| \diamond \operatorname{sgn}(g_{2,1,1}(i_1, i_2)) y_{i-i_1} y_{i-i_2}|_{i_1=1}^M|_{i_2=i_1+1}^M) + \\
& C_{2,2} \cdot MED(|g_{2,2}(i_1, i_2)| \diamond \operatorname{sgn}(g_{2,2}(i_1, i_2)) x_{i-i_1} y_{i-i_2}|_{i_1=0}^{N-1}|_{i_2=1}^M) + \\
& C_{2,3,2} \cdot MED(|g_{2,3,2}(i_1)| \diamond \operatorname{sgn}(g_{2,3,2}(i_1)) x_{i-i_1}^2|_{i_1=0}^{N-1}) + \\
& C_{2,3,1} \cdot MED(|g_{2,3,1}(i_1, i_2)| \diamond \operatorname{sgn}(g_{2,3,1}(i_1, i_2)) x_{i-i_1} x_{i-i_2}|_{i_1=0}^{N-1}|_{i_2=i_1+1}^{N-1})
\end{aligned} \tag{24}$$

Filtr RPWM redukuje się do tradycyjnego filtru WM dla $C_{1,1} = 0, C_{1,2} = 1, C_{2,1,2} = 0, C_{2,1,1} = 0, C_{2,2} = 0, C_{2,3,2} = 0, C_{2,3,1} = 0$, natomiast dla $C_{1,1} = 0, C_{1,2} = 1, C_{2,1,2} = 0, C_{2,1,1} = 0, C_{2,2} = 0, C_{2,3,2} = 1, C_{2,3,1} = 1$ redukuje się do filtru PWM.

Filtr RPWM można wyrazić w formie bardziej zwartej jako

$$\begin{aligned}
y = & C_{1,1} \langle \mathbf{g}_{1,1} \rangle + C_{1,2} \langle \mathbf{g}_{1,2} \rangle + \\
& C_{2,1,2} \langle \mathbf{g}_{2,1,2} \rangle + C_{2,1,1} \langle \mathbf{g}_{2,1,1} \rangle + \\
& C_{2,2} \langle \mathbf{g}_{2,2} \rangle + C_{2,3,2} \langle \mathbf{g}_{2,3,2} \rangle + C_{2,3,1} \langle \mathbf{g}_{2,3,1} \rangle
\end{aligned}, \tag{25}$$

gdzie $\langle \mathbf{g} \rangle \equiv MED(|\mathbf{g}| \diamond \operatorname{sgn}(\mathbf{g})\mathbf{z})$ oraz

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_{1,2} &= [x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-N+1}], \\
\mathbf{z}_{1,1} &= [y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-M}], \\
\mathbf{z}_{2,3,1} &= [x_i x_{i-1}, x_i x_{i-2}, \dots, x_i x_{i-N+1}, x_{i-1} x_{i-2}, \dots, x_{i-N+2} x_{i-N+1}], \\
\mathbf{z}_{2,1,1} &= [y_{i-1} y_{i-2}, y_{i-1} y_{i-3}, \dots, y_{i-1} y_{i-M}, y_{i-2} y_{i-3}, \dots, y_{i-M+1} y_{i-M}], \\
\mathbf{z}_{2,3,2} &= [x_i^2, x_{i-1}^2, \dots, x_{i-N+1}^2], \\
\mathbf{z}_{2,1,2} &= [y_{i-1}^2, y_{i-2}^2, \dots, y_{i-M}^2], \\
\mathbf{z}_{2,2} &= [x_i y_{i-1}, x_i y_{i-2}, \dots, x_i y_{i-M}, x_{i-1} y_{i-1}, \dots, x_{i-1} y_{i-M}, \dots, x_{i-N+1} y_{i-M}].
\end{aligned} \tag{26}$$

Wyjście filtru RPWM jest liniową kombinacją wyjść podfiltrów WM, tj., $y = y_{1,1} + y_{1,2} + y_{2,1,2} + y_{2,1,1} + y_{2,2} + y_{2,3,2} + y_{2,3,1}$, gdzie $y_{1,1} = C_{1,1} \langle \mathbf{g}_{1,1} \rangle$, $y_{1,2} = C_{1,2} \langle \mathbf{g}_{1,2} \rangle$, $y_{2,1,2} = C_{2,1,2} \langle \mathbf{g}_{2,1,2} \rangle$, $y_{2,1,1} = C_{2,1,1} \langle \mathbf{g}_{2,1,1} \rangle$, $y_{2,2} = C_{2,2} \langle \mathbf{g}_{2,2} \rangle$, $y_{2,3,2} = C_{2,3,2} \langle \mathbf{g}_{2,3,2} \rangle$ and $y_{2,3,1} = C_{2,3,1} \langle \mathbf{g}_{2,3,1} \rangle$.

Równania te można łatwo rozszerzyć dla filtru RPWM wyższego rzędu.

Aktualizacja wag filtru RPWM

Obserwowany proces $x(n)$ jest statystycznie powiązany z pożądanym procesem $d(n)$. Estymacja żądanego sygnału $\hat{d}(n)$ na wyjściu filtru PWM wynosi [76]

$$\begin{aligned}
\hat{d}(n) = & \hat{C}_1(n) \cdot MED(|\hat{h}_1(i; n)| \diamond \operatorname{sgn}(\hat{h}_1(i; n)) x_i(n)|_{i=0}^{N-1}) + \\
& \hat{C}_{2,1}(n) \cdot MED(|\hat{h}_{2,1}(\mathbf{i}; n)| \diamond \operatorname{sgn}(\hat{h}_{2,1}(\mathbf{i}; n)) x_{i_1}(n) x_{i_2}(n)|_{i_1=0}^{N-1}|_{i_2=i_1 \wedge i_2 \neq i_1}^{N-1}) + \\
& \hat{C}_{2,2}(n) \cdot MED(|\hat{h}_{2,2}(i; n)| \diamond \operatorname{sgn}(\hat{h}_{2,2}(i; n)) x_i^2(n)|_{i=0}^{N-1})
\end{aligned}, \tag{27}$$

gdzie i (lub $\mathbf{i} = [i_1, i_2]$) jest indeksem wag oraz n jest indeksem kroku. Parametry \hat{h} oznaczają oszacowane współczynniki filtru WM i \hat{C} definiuje współczynniki skali.

Współczynniki podfiltrów WM optymalizowane są zgodnie z kryterium średniego błędu bezwzględnego (ang. mean absolute error, MAE), gdzie minimalizowana funkcja kosztu wynosi [74, 76]

$$J(\mathbf{h}) = E\{|d(n) - \hat{d}(n)|\} \tag{28}$$

Współczynniki każdego podfiltru WM aktualizowane są zgodnie z szybkim algorytmem najmniejszej średniej bezwzględnej (ang. least mean absolute, LMA) [74, 76]

$$\hat{h}_\theta(i; n+1) = \hat{h}_\theta(i; n) + \mu_\theta(n) \left(d(n) - \hat{d}(n) \right) \operatorname{sgn} \left(\hat{h}_\theta(i; n) \right) \operatorname{sgn} \left(\hat{q}_\theta(i; n) - \hat{d}(n) \right), \quad (29)$$

gdzie $\theta \in \Theta = \{(1), (2, 1), (2, 2)\}$ i $\hat{q}_\theta(i; n)$ oznaczają obserwację ze znakiem, próbkę krzyżową lub kwadratową. $\mu_\theta(n)$ definiuje współczynnik uczenia się, który może być stały lub zmieniać się w czasie.

Optymalizacja współczynników skali według kryterium MAE daje aktualizację [79, 76]

$$\hat{C}_\theta(n+1) = \hat{C}_\theta(n) + \mu_C(n) y_\theta(n) \operatorname{sgn} \left(d(n) - \hat{d}(n) \right), \quad (30)$$

gdzie $\theta \in \Theta$.

Natomiast w przypadku filtru RPWM, estymacja żądanego sygnału $\hat{d}(n)$ na wyjściu filtru RPWM wynosi [H1]

$$\begin{aligned} \hat{d}(n) = & \hat{C}_{1,1}(n) \cdot MED \left(|\hat{g}_{1,1}(i; n)| \diamond \operatorname{sgn}(\hat{g}_{1,1}(i; n)) y_i(n) \Big|_{i=1}^M \right) + \\ & \hat{C}_{1,2}(n) \cdot MED \left(|\hat{g}_{1,2}(i; n)| \diamond \operatorname{sgn}(\hat{g}_{1,2}(i; n)) x_i(n) \Big|_{i=0}^{N-1} \right) + \\ & \hat{C}_{2,1,2}(n) \cdot MED \left(|\hat{g}_{2,1,2}(i; n)| \diamond \operatorname{sgn}(\hat{g}_{2,1,2}(i; n)) y_i^2(n) \Big|_{i=1}^M \right) + \\ & \hat{C}_{2,1,1}(n) \cdot MED \left(|\hat{g}_{2,1,1}(\mathbf{i}; n)| \diamond \operatorname{sgn}(\hat{g}_{2,1,1}(\mathbf{i}; n)) y_{i_1}(n) y_{i_2}(n) \Big|_{i_1=1}^M \Big|_{i_2=i_1+1}^M \right) + , \quad (31) \\ & \hat{C}_{2,2}(n) \cdot MED \left(|\hat{g}_{2,2}(\mathbf{i}; n)| \diamond \operatorname{sgn}(\hat{g}_{2,2}(\mathbf{i}; n)) x_{i_1}(n) y_{i_2}(n) \Big|_{i_1=0}^{N-1} \Big|_{i_2=1}^M \right) + \\ & \hat{C}_{2,3,2}(n) \cdot MED \left(|\hat{g}_{2,3,2}(i; n)| \diamond \operatorname{sgn}(\hat{g}_{2,3,2}(i; n)) x_i^2(n) \Big|_{i=0}^{N-1} \right) + \\ & \hat{C}_{2,3,1}(n) \cdot MED \left(|\hat{g}_{2,3,1}(\mathbf{i}; n)| \diamond \operatorname{sgn}(\hat{g}_{2,3,1}(\mathbf{i}; n)) x_{i_1}(n) x_{i_2}(n) \Big|_{i_1=0}^{N-1} \Big|_{i_2=i_1+1}^{N-1} \right) \end{aligned}$$

gdzie i (lub $\mathbf{i} = [i_1, i_2]$) jest indeksem wag oraz n jest indeksem kroku.

Współczynniki każdego podfiltru WM aktualizowane są zgodnie z szybkim algorytmem najmniejszej średniej bezwzględnej (LMA) (równanie (29)), gdzie $\theta \in \Phi = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1, 2), (2, 1, 1), (2, 2), (2, 3, 2), (2, 3, 1)\}$ i \hat{h}_θ należy zastąpić przez \hat{g}_θ . Na przykład, dla przypadku $\theta = (2, 1, 1)$, $\hat{q}_{2,1,1}(\mathbf{i}; n) = \operatorname{sgn}(\hat{g}_{2,1,1}(\mathbf{i}; n)) y_{i_1}(n) y_{i_2}(n)$.

Współczynniki skali \hat{C}_θ optymalizowane są według kryterium MAE zgodnie z równaniem (30), gdzie $\theta \in \Phi$.

W przypadku podfiltrów WM z nieujemnymi wagami całkowitymi, całkowite współczynniki wag można aktualizować zgodnie z

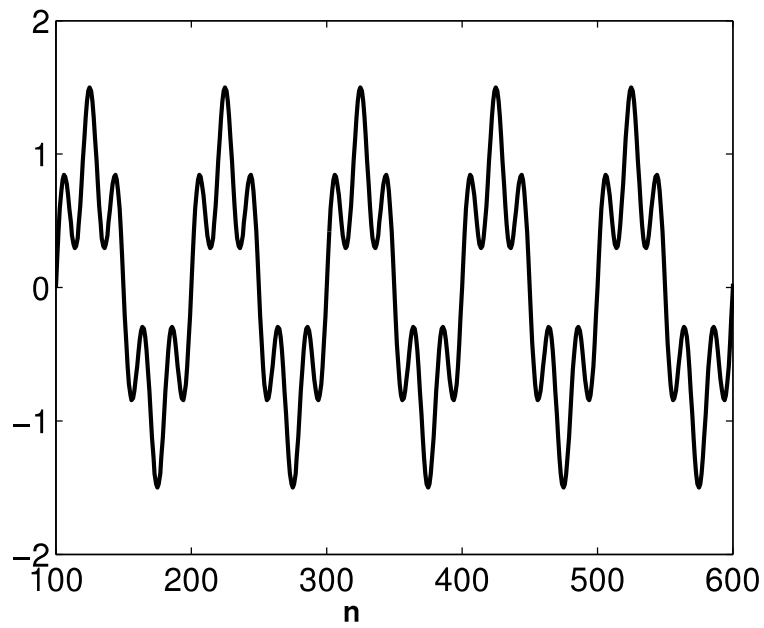
$$\hat{h}_\theta(i; n+1) = \hat{h}_\theta(i; n) + \mu_\theta(n) \operatorname{sgn} \left(d(n) - \hat{d}(n) \right) \operatorname{sgn} \left(\hat{h}_\theta(i; n) \right) \operatorname{sgn} \left(\hat{q}_\theta(i; n) - \hat{d}(n) \right), \quad (32)$$

gdzie oznaczenia są zgodne z oznaczeniami w równaniu (29).

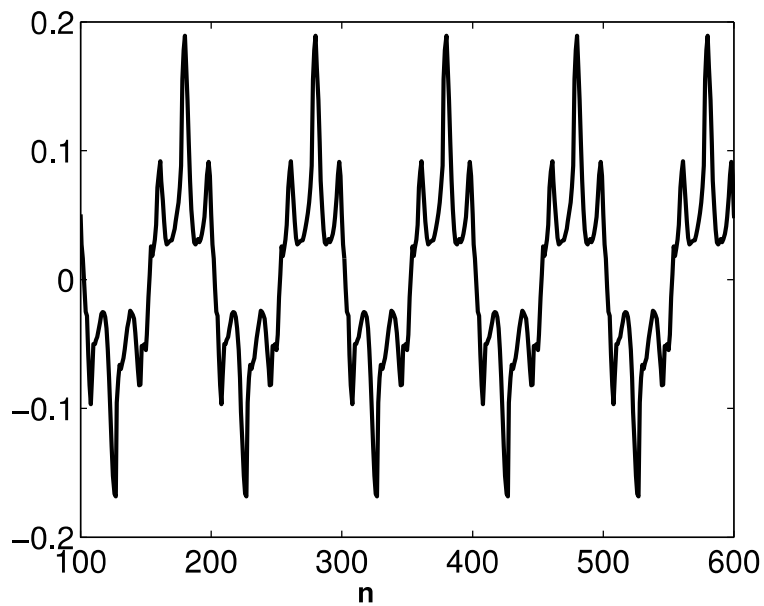
Filtracja szumu addytywnego o rozkładzie GGD

Skuteczność działania nowej techniki filtracji dla szumu addytywnego o rozkładzie GGD została potwierdzona eksperymentalnie [H1]. Nieznany model nieliniowy został użyty jako pożądane wyjście dla filtrów RPWM i PWM. Po kroku uczenia modele te zostały przetestowane przy zaszumionym wejściu. Wielkość próbki ustalono na 20000 próbek. Jako sygnał wejściowy wybrano dwie sinusoidy $\sin(0.02\pi) + 0.5 \sin(0.1\pi)$ (rysunek 3).

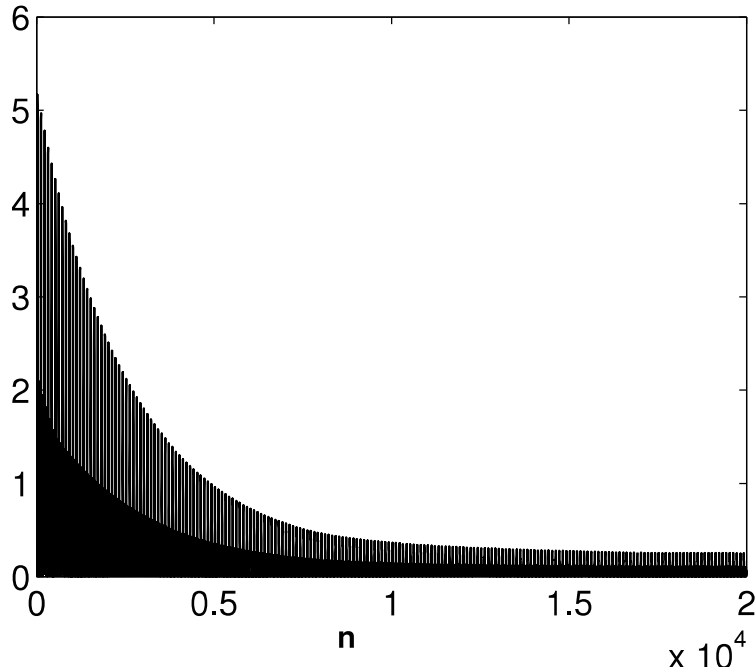
Nieznany model wybrano jako rekursywny filtr wielomianowy medianowy ważony drugiego rzędu z $N = 7$ i $M = 5$. Początkowe wartości wag filtru g_θ zostały wylosowane generatorem pseudolosowym o rozkładzie jednostajnym o wartościach z przedziału $(-0.5, 0.5)$ oraz została przyjęta wartość $C_\theta = 0.1$. Wyjście modelu jest przedstawione na rysunku 4.



Rysunek 3: Sygnał wejściowy [H1]



Rysunek 4: Wyjście nieznanego rekursywnego filtra wielomianowego medianowego ważonego drugiego rzędu [H1]



Rysunek 5: Krzywa uczenia wag filtru PWM [H1]

Model ten wykorzystano do dostosowania wag filtru PWM drugiego rzędu dla $N = 9$. Współczynniki uczenia zostały ustalone na wartości stałe $\mu_\theta(n) = 0.01$ i $\mu_C(n) = 0.001$. Krzywa uczenia dla adaptacji pokazana jest na rysunku 5. Widoczne jest, że filtry PWM z czasem dostosowują się do nieznanego modelu.

Nieznany model posłużył również do dostosowania wag filtru drugiego rzędu RPWM dla $N = 5$ i $M = 3$. Wybrano współczynniki N i M mniejsze od nieznanego modelu $N = 7$, $M = 5$, aby wymusić na filtrze aproksymację nieliniowości wyższego rzędu. Współczynniki uczenia dla filtru RPWM również zostały ustawione na wartości stałe $\mu_\theta(n) = 0.01$ i $\mu_C(n) = 0.001$. Rysunek 6 przedstawia szybszą zbieżność dla filtru RPWM niż dla filtru PWM (rysunek 5).

Dostosowane modele zostały zweryfikowane na sygnale wejściowym (rysunek 3). Sygnał wyjściowy dla filtra PWM pokazano na rysunku 7, gdzie jest widoczne, że model nie modeluje poprawnie nieznanego układu nieliniowego (rysunek 4).

Na rysunku 8 pokazano, że wyjście filtru RPWM jest porównywalne z wyjściem nieznanego modelu nieliniowego (rysunek 4).

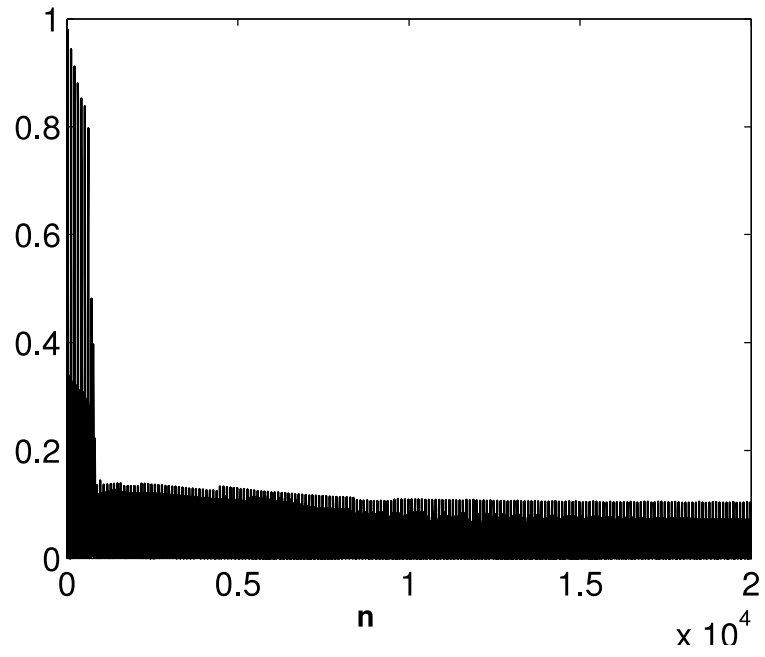
Dodatkowo dla porównania zastosowano również filtr wielomianowy drugiego rzędu w celu dostosowania do nieznanego układu. Algorytmem adaptacji wag filtru był algorytm najmniejszej średniej kwadratów (ang. least mean squares, LMS). Wyjście wyuczonego filtru wielomianowego drugiego rzędu dla sygnału wejściowego pokazano na rysunku 9.

Obliczony błąd średniokwadratowy (ang. mean square error, MSE) pomiędzy odpowiedzią nieznanego systemu i dostosowanym filtrem wielomianowym drugiego rzędu, filtrem PWM i RPWM wyniósł odpowiednio $1.6 \cdot 10^{-4}$, $60 \cdot 10^{-4}$ i $7.2 \cdot 10^{-4}$.

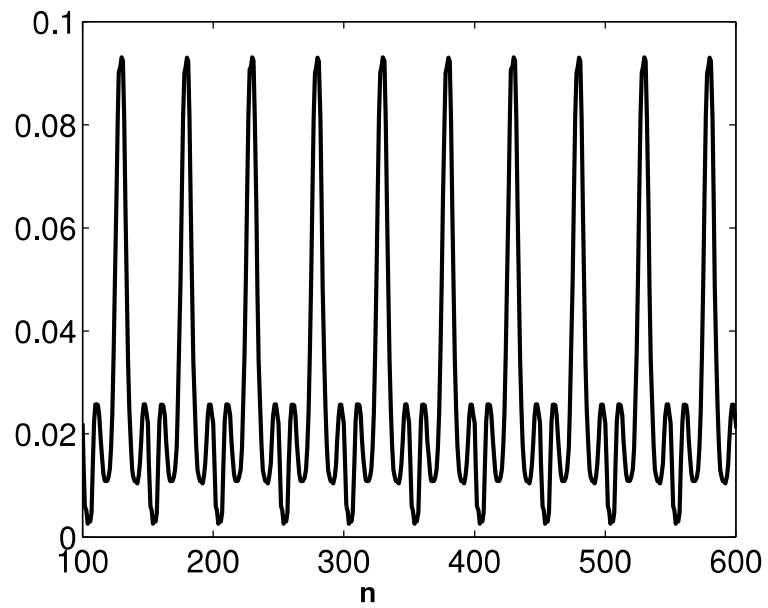
Filtry te zostały następnie przetestowane przy zaszumionym sygnale wejściowym. Jako szum przyjęto addytywny uogólniony rozkład Gaussa z parametrem kształtu $p = 0.1$ dla różnych wartości wariancji. Procedura generowania zmiennej losowej dla GGD została opisana w [67]. MSE dla odpowiedzi tych filtrów przedstawiono na rysunku 10. Dla rozpatrywanego nieznanego nieliniowego modelu filtr RPWM był najbardziej odporny na tego typu zakłócenia.

W kolejnym przypadku jako szum przyjęto addytywny rozkład Laplace'a ze zmienną wariancją. MSE dla odpowiedzi tych filtrów przedstawiono na rysunku 11. Dla rozpatrywanego nieznanego nieliniowego modelu dla większej wartości parametru kształtu $p = 1$, filtr RPWM był najbardziej odporny na tego typu zakłócenia tylko do określonego poziomu wariancji.

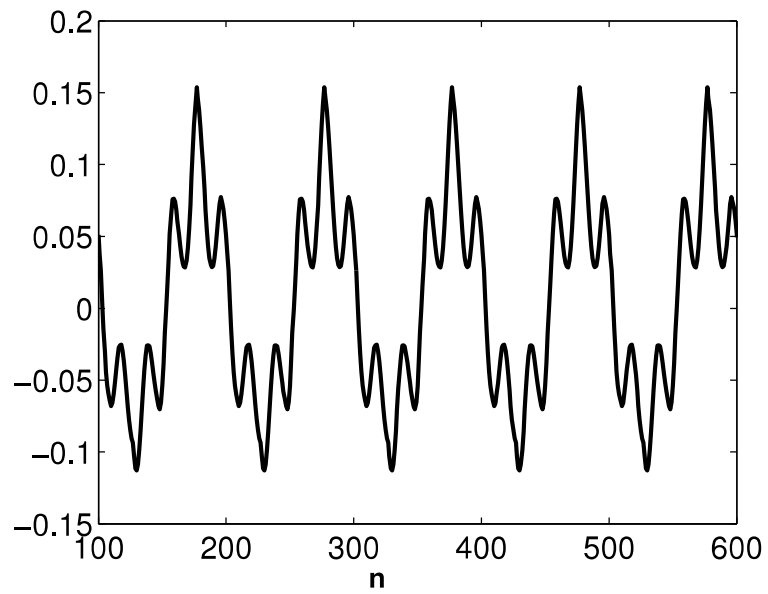
Podsumowując, filtry PWM i RPWM, podobnie jak filtr Volterra, wykorzystują statystykę wyż-



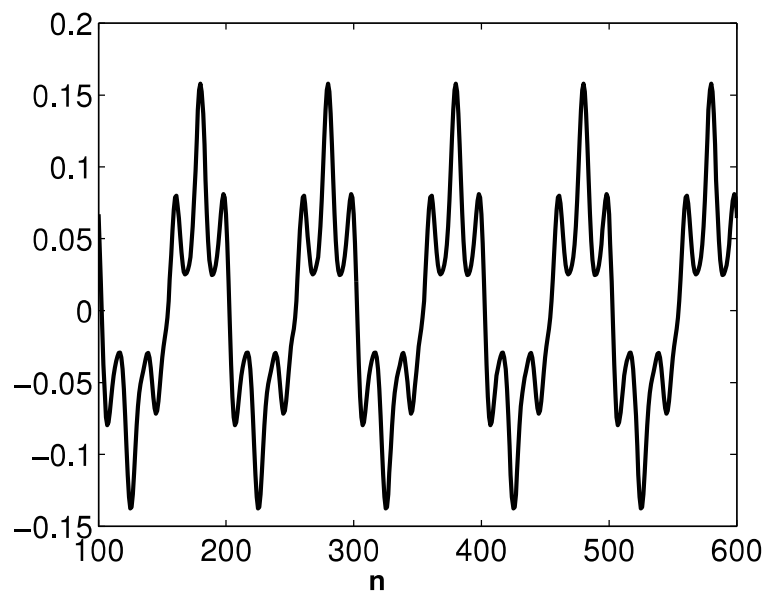
Rysunek 6: Krzywa uczenia wag filtru RPWM [H1]



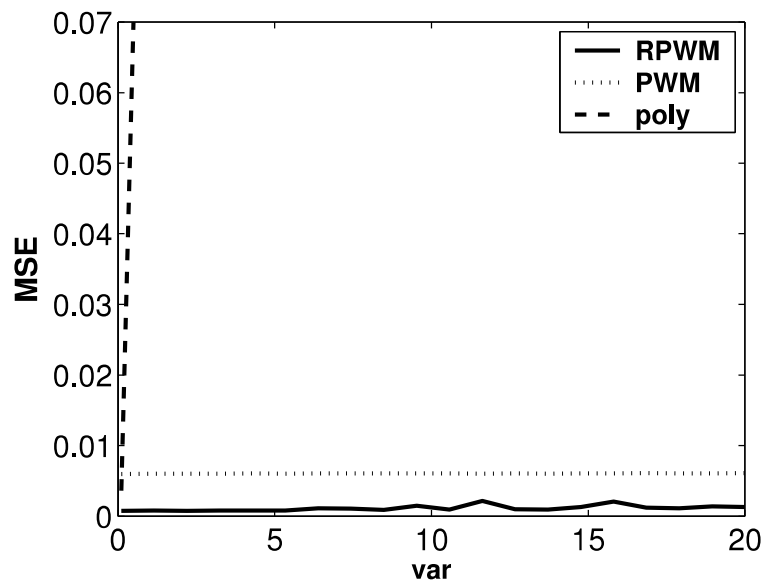
Rysunek 7: Sygnał wyjściowy PWM [H1]



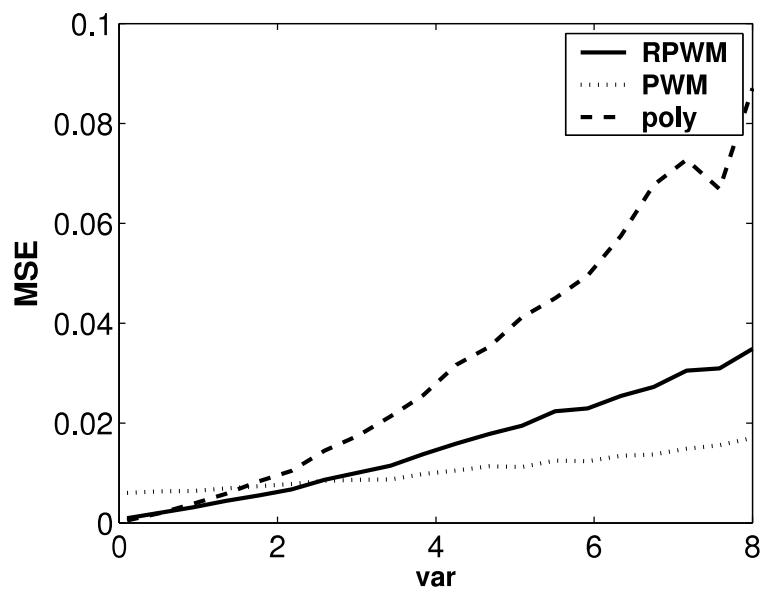
Rysunek 8: Sygnał wyjściowy RPWM [H1]



Rysunek 9: Sygnał wyjściowy filtra wielomianowego drugiego rzędu [H1]



Rysunek 10: Błąd średniokwadratowy (MSE) filtrów PWM, RPWM i wielomianowego drugiego rzędu (poly) dla sygnału wejściowego zaburzonego przez GGD (parametr kształtu równy $p = 0.1$) dla różnych wartości wariancji (var) [H1]



Rysunek 11: Błąd średniokwadratowy (MSE) filtrów PWM, RPWM i wielomianowego drugiego rzędu (poly) dla sygnału wejściowego zaburzonego rozkładem Laplace'a dla różnych wartości wariancji (var) [H1]

szych rzędów sygnałów przy jednoczesnym uniknięciu problemów związanych ze wzmacnianiem szumów przez filtr Volterra. *Nowa klasa filtrów RPWM [H1] potrafi lepiej aproksymować nieznaną system nieliniowy przy szybszym przebiegu procesu uczenia w celu wyznaczenia wag niż dla filtrów PWM. Filtry RPWM także, w określonych przypadkach, są bardziej odporne na addytywny szum o rozkładzie GGD niż filtry PWM i filtry wielomianowe.*

Na podstawie powyższych osiągnięć został wprowadzony nowy obszar badań cyfrowej filtracji sygnałów.

4.3.3 Estymacja parametru kształtu uogólnionego rozkładu Gaussa dla małej wielkości próby

Większość estymatorów parametru kształtu GGD zakłada asymptotyczny przypadek, gdy dostępna jest nieskończona liczba obserwacji, ale w rzeczywistości dostępny jest tylko zbiór o ograniczonej wielkości. Bardzo duża wartość wariancji wyniku estymacji dla bardzo małej liczebności próby powoduje, że metody estymacji są bardzo niedokładne. Zachowanie takie obserwuje się zarówno w przypadku estymatora parametru kształtu rozkładu GGD metodą momentów jak i metodą największej wiarygodności. Wraz ze zmniejszaniem się rozmiaru próby rośnie wariancja estymatora (maleje dokładność wyniku), a nawet dla niektórych obserwacji numeryczne rozwiązanie nieliniowego równania nie zbiega się do rozwiązania. *Aby przezwyciężyć to ograniczenie, w [H2] zmodyfikowano metodę momentów estymacji parametru kształtu.* Momenty wyższych rzędów zostały rozwinięte w ciągi, a następnie zmodyfikowano metodę momentów poprzez podstawienie ograniczonej liczby składników ciągu. *Zabieg ten pozwolił na poprawę zbieżności nieliniowego równania do rozwiązania, a także został zmniejszony względny błąd średniokwadratowy (ang. relative mean square error, RMSE) dla małych prób w stosunku do metody momentów bez modyfikacji.* W rzeczywistych przypadkach, szczególnie w zastosowaniach do sygnałów multimedialnych, gdzie znajduje zastosowanie GGD nie zawsze dostępna jest duża próba obserwacji. Dlatego konieczna jest metoda zwiększająca dokładność estymacji parametru kształtu GGD dla małej próby.

Obliczanie parametrów GGD dla małych i dużych prób różni się przy korzystaniu z metody największej wiarygodności, co pokazano w [80]. Zagadnienie estymacji parametru kształtu rozkładu GGD dla małej próby zostało zaadresowane w pracy [65]. Autorzy stwierdzili, że estymatory (metoda współczynnika uogólnionego Gaussa Mallata (ang. Mallat's generalized Gaussian ratio method, MRM), metoda współczynnika uogólnionego Gaussa kurtozy (ang. kurtosis generalized Gaussian ratio method, KRM)) nie były zadowalające w przypadku małych prób. A także, że metoda dopasowania negentropii (ang. negentropy matching, NM) może nadal dokładnie oszacować parametry dla małej wielkości próbki, ale tylko dla parametru kształtu $p < 1$. Natomiast metoda globalnej konwergencji (GCM) wymaga znalezienia pierwiastka z $Z_n(p) = 0$, która dla małej próby może nie mieć pierwiastka rzeczywistego.

Metoda ML ma mniejszą wariancję dla małej wielkości próby niż metoda MM [70], ale jest złożona i czasochłonna. Metoda ML zakłada przypadek asymptotyczny, to znaczy, że jest dostępna nieskończona liczba obserwacji. Również ta metoda dla coraz mniejszych rozmiarów prób posiada coraz większą wariancję. Bardzo duża wartość wariancji dla bardzo małej liczebności próby sprawia, że ta metoda szacowania również jest bardzo niedokładna, wręcz równanie może nie posiadać rozwiązania. W [H3] zostało przedstawione, że taka sytuacja wystąpiła dla metody ML dla $N < 60 \wedge p = 0.4$, $N < 85 \wedge p = 1$ i $N < 120 \wedge p = 2$.

Porównanie metody ML i Mallata do estymacji parametru kształtu GGD w przedziale 0.3 – 3 przedstawiono w pracy w badaniach przed doktoratem [63], gdzie ta ostatnia nie jest dokładna dla całego zakresu parametru kształtu.

Momenty (równanie (6)) po prawej stronie równania (7) można rozwinąć w ciągi [H2]. Każdy składnik $|x_i|^m$ sumy można przedstawić w postaci $(1 \pm y)^m$, którą można rozwinąć w ciąg dla $m > 0$ i $|y| \leq 1$. Dla $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$ można to zapisać za pomocą dwumianu Newtona

$$\begin{aligned} (x_i)^m &= (1 + (x_i - 1))^m = \\ &= 1 + m \cdot (x_i - 1) + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} \cdot (x_i - 1)^2 + \dots \\ &+ \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!} \cdot (x_i - 1)^3 + \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Dla $x_i \in \ll -1, 0$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} (-x_i)^m &= (1 - (x_i + 1))^m = \\ &= 1 - m \cdot (x_i + 1) + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} \cdot (x_i + 1)^2 - \dots \\ &= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!} \cdot (x_i + 1)^3 + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Dla $x_i > 1$ można zapisać

$$\begin{aligned} (x_i)^m &= |[x_i]|^m \cdot \left(1 + \left(\frac{x_i}{|[x_i]|} - 1\right)\right)^m = \\ &= |[x_i]|^m \cdot \left\{1 + m \cdot \left(\frac{x_i}{|[x_i]|} - 1\right) + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} \cdot \left(\frac{x_i}{|[x_i]|} - 1\right)^2 + \dots \right. \\ &= \left. \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!} \cdot \left(\frac{x_i}{|[x_i]|} - 1\right)^3 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

Operator $[x]$ zaokrągla elementy x do zera, co daje liczbę całkowitą. Dla $x_i < -1$ można zapisać

$$\begin{aligned} (-x_i)^m &= |[x_i]|^m \cdot \left(1 - \left(\frac{x_i}{|[x_i]|} + 1\right)\right)^m = \\ &= |[x_i]|^m \cdot \left\{1 - m \cdot \left(\frac{x_i}{|[x_i]|} + 1\right) + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} \cdot \left(\frac{x_i}{|[x_i]|} + 1\right)^2 - \dots \right. \\ &= \left. \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!} \cdot \left(\frac{x_i}{|[x_i]|} + 1\right)^3 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

Równania (33)–(36) są używane w aproksymacji momentu (równanie (6)) i używane w równaniu (7) do wyznaczenia p . Biorąc pod uwagę tylko ograniczoną liczbę składowych ciągu, wpływ wartości odstających na równanie MM można złagodzić dla małej wielkości próby i momentów wyższego rzędu, a w konsekwencji zmniejszyć RMSE i poprawić zbieżność.

Symulacje działania estymatora zmodyfikowanej metody momentów parametru kształtu uogólnionego rozkładu Gaussa dla małej wielkości próbeki

Równania zmodyfikowanej metody momentów zostały zweryfikowane za pomocą generatora GGD ze stałą wariancją równą jeden i zmiennym parametrem kształtu w zakresie $p \in \ll 0.3, 6 \gg$. Do porównania wyników estymatorów zastosowano względny błąd średniokwadratowy. RMSE obliczono z równania

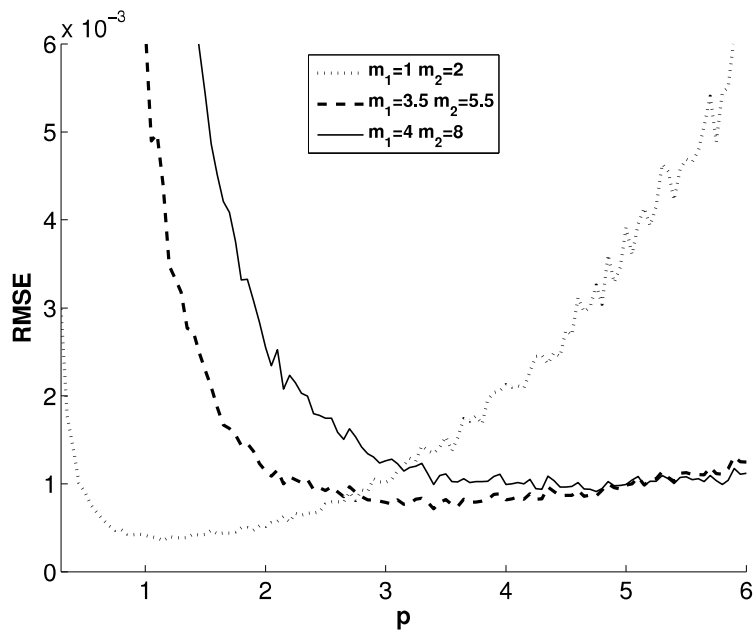
$$RMSE = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{(\hat{p} - p)^2}{p^2}, \quad (37)$$

gdzie \hat{p} to wartość wyestymowana przez model, a p to rzeczywista wartość parametru kształtu. M oznacza liczbę powtórzeń.

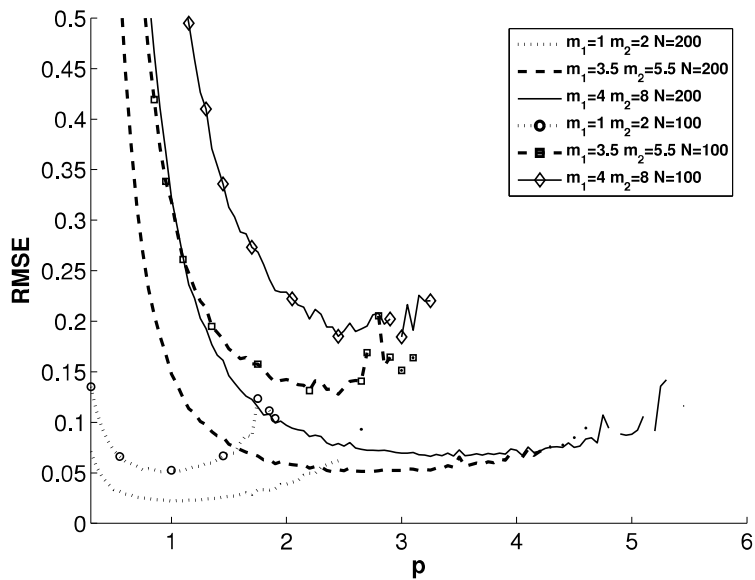
Mała liczebność próby może powodować trudności ze znalezieniem pierwiastka metody MM (równanie (7)), dlatego warunek zatrzymania obliczeń został ustawiony na $tolX = 1e - 4$ i $tolY = 1e - 4$, gdzie $tolX$ i $tolY$ są błędami bezwzględnymi. Gdy co najmniej jedno rozwiązanie nie jest dostępne dla określonych warunków, wówczas na wykresach są brakujące punkty dla takiego przypadku.

Rysunek 12 przedstawia RMSE dla metody MM estymacji parametru kształtu p rozkładu GGD ze zmienną wartością parametru kształtu p i wybraną stałą wielkością próbki $N = 10^4$. Każda iteracja była powtarzana $M = 10^3$. Dla stosunkowo dużej wielkości próbki RMSE nie jest stałe dla wszystkich wartości parametrów kształtu GGD dla metody MM. Wartość RMSE zależy od wybranych rzędów momentów m_1 oraz m_2 i jest stosunkowo niewielka. Jako przykład wybrano całkowite rzędy momentów $m_1 = 4$, $m_2 = 8$ oraz rzeczywiste rzędy momentów $m_1 = 3.5$, $m_2 = 5.5$. Momenty wyższego rzędu wykazują mniejszą wartość RMSE dla metody MM dla wyższych wartości p .

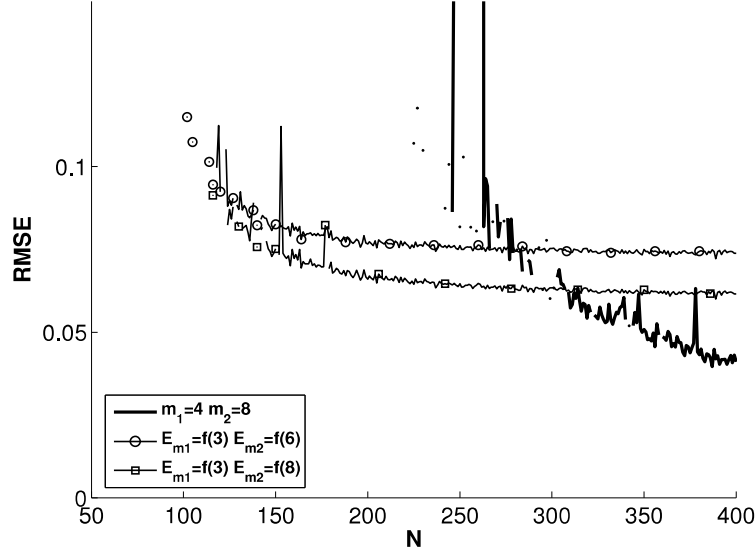
W przypadku małej liczebności próby obserwuje się wzrost RMSE oraz zmniejszenie zakresu zbieżności (rysunek 13). Momenty wyższego rzędu zapewniają zbieżność równania MM dla zakresu o wyższych wartościach parametru kształtu GGD, podczas gdy metoda Mallata może nie mieć tam rozwiązania. Zmniejszył się również zakres zbieżności równania MM dla metody Mallata przy zmniejszeniu



Rysunek 12: Porównanie RMSE dla metody MM estymacji parametru kształtu p rozkładu GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i wybranej stałej wielkości próby $N = 10^4$ (relatywnie duża liczebność próby) dla wybranych momentów [H2]



Rysunek 13: Porównanie RMSE dla metody MM estymacji parametru kształtu p rozkładu GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i wybranej stałej wielkości próby $N = 100$ i $N = 200$ dla wybranych momentów [H2]



Rysunek 14: Porównanie RMSE dla metody MM ($m_1 = 4$, $m_2 = 8$) i wybranego rozwinięcia estymacji parametru kształtu p rozkładu GGD ze zmienną wielkością próby N dla wybranej ustalonej wartości $p = 6$ w generatorze GGD [H2]

liczebności próby. Rysunek 13 przedstawia wykresy dla $N = 100$ i $N = 200$, a każda iteracja została powtórzona $M = 10^4$. Ta sama liczba powtórzeń jest zachowywana dla pozostałych obliczeń.

Stosując równania (33)–(36) wpływ wartości odstających na równanie MM można złagodzić dla małej próby i momentów wyższego rzędu, a zakres zbieżności można rozszerzyć w kierunku mniejszych rozmiarów prób.

Rozwinięcie $|x_i|^m$ w równaniu (6) do k -tej składowej włącznie, tj. $(\frac{x_i}{|x_i|} \pm 1)^k$ będzie oznaczane jako $E_m = f(k)$. Rysunek 14 pokazuje, że wybranie tylko kilku składowych w obliczeniu momentów (równania (33)–(36)) RMSE jest stabilne i przyjmuje mniejsze wartości niż w zwykłym obliczaniu. Wybrane rozwinięcia $E_{m_1} = f(3)$, $E_{m_2} = f(6)$ i $E_{m_1} = f(3)$, $E_{m_2} = f(8)$ są przedstawione dla momentów całkowitych rzędów $m_1 = 4$, $m_2 = 8$ i dla parametru kształtu $p = 6$ i wykazują mniejszą wartość RMSE poniżej $N = 300$.

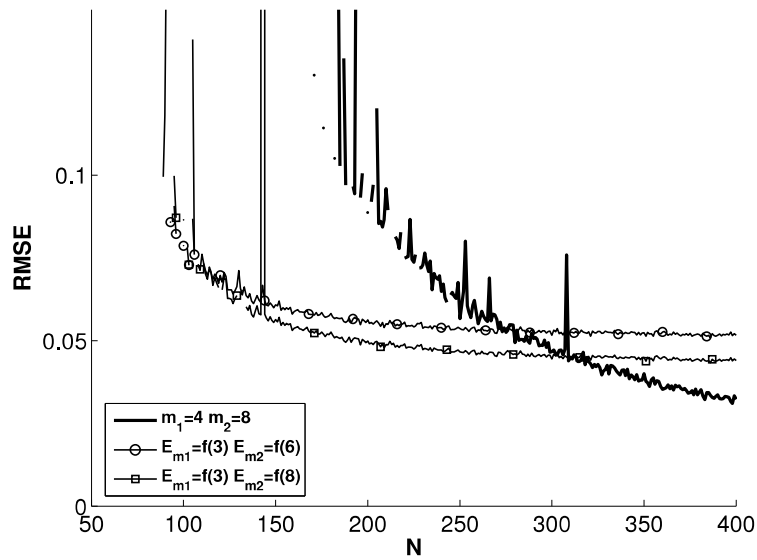
To samo zachowanie obserwuje się dla momentów całkowitych rzędów $m_1 = 4$ i $m_2 = 8$ oraz dla parametru kształtu $p = 5$. Dla wybranych rozszerzeń $E_{m_1} = f(3)$, $E_{m_2} = f(6)$ i $E_{m_1} = f(3)$, $E_{m_2} = f(8)$, RMSE jest stabilne i przyjmuje wartości mniejsze niż w zwykłym obliczaniu poniżej $N = 260$ (rysunek 15).

Wybrane rozwinięcia $E_{m_1} = f(3)$, $E_{m_2} = f(6)$ i $E_{m_1} = f(3)$, $E_{m_2} = f(8)$ oraz metodę MM dla momentów całkowitych rzędów $m_1 = 4$ i $m_2 = 8$ dla małej próby $N = 169$ i dla szerszego zakresu p porównano na rysunku 16. Można zauważyć, że rozwinięcia $E_{m_1} = f(3)$, $E_{m_2} = f(6)$ i $E_{m_1} = f(3)$, $E_{m_2} = f(8)$ skutkowały mniejszym RMSE i zapewniły zbieżność dla szerszego zakresu p .

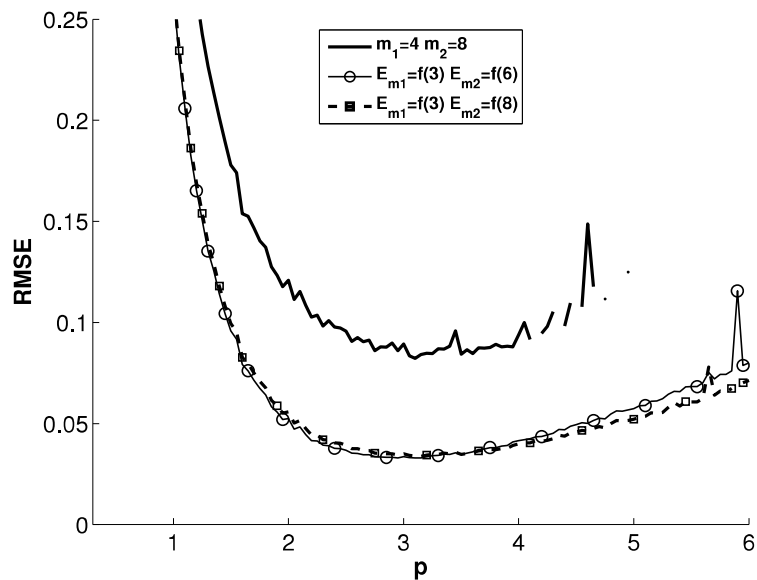
W przypadku małej liczebności próby dla momentów wyższych rzędów z rzędami o wartościach rzeczywistych zbieżność równania MM można również poprawić w kierunku obserwacji mniejszych rozmiarów. Rysunek 17 przedstawia kilka składowych w obliczeniach momentów (równania (33)–(36)) dla wartości rzeczywistych $m_1 = 3.5$ i $m_2 = 5.5$ w zakresie zmiennej wielkości próby N dla ustalonej wartości $p = 6$ w generatorze GGD. Można również zauważyć, że RMSE jest dłużej stabilne dla $E_{m_1} = f(3)$ i $E_{m_2} = f(6)$ w kierunku mniejszego N i ma również mniejszą wartość.

Dla rzędów momentów $m_1 = 3.5$ i $m_2 = 5.5$ oraz dla parametru kształtu $p = 5$ jedno z rozwinięć $E_{m_1} = f(3)$ i $E_{m_2} = f(6)$ ma mniejszą wartość RMSE i jest stabilne dla dłuższego zakresu N niż RMSE dla momentów obliczanych bez rozwinięcia. Natomiast kolejne rozwinięcie $E_{m_1} = f(3)$ i $E_{m_2} = f(4)$ osiąga również mniejszą wartość RMSE niż RMSE dla momentów obliczanych bez rozwinięcia i jest nadal stabilne poniżej $N = 250$ (rysunek 18).

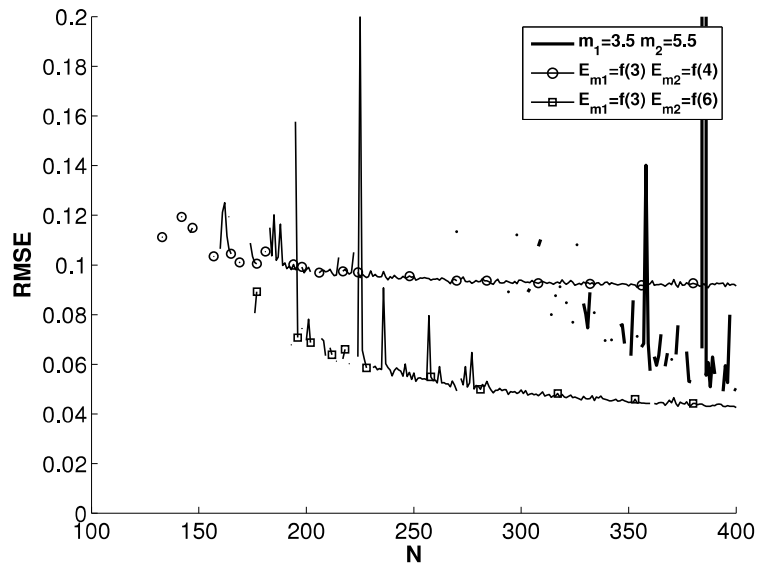
Wybrane rozwinięcia $E_{m_1} = f(3)$, $E_{m_2} = f(4)$ i $E_{m_1} = f(3)$, $E_{m_2} = f(6)$ oraz metodę MM dla momentów rzeczywistych rzędów $m_1 = 3.5$, $m_2 = 5.5$ dla małej próby $N = 300$ i dla szerszego



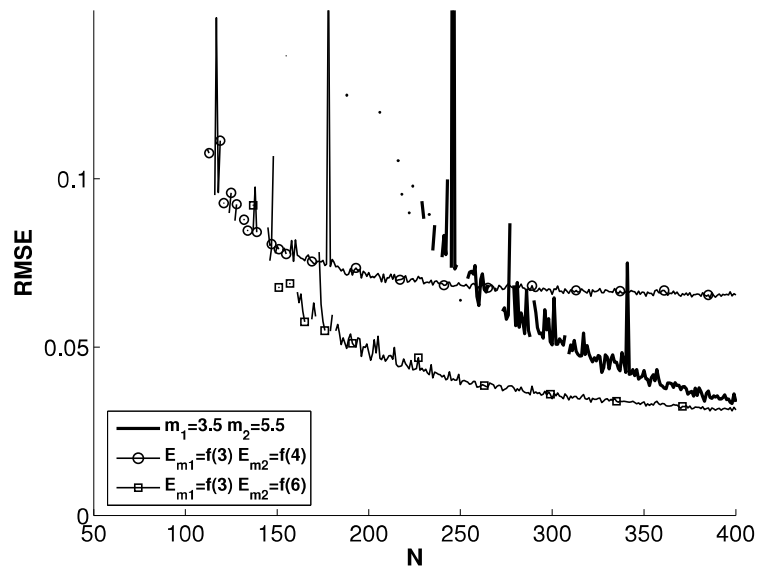
Rysunek 15: Porównanie RMSE dla metody MM ($m_1 = 4, m_2 = 8$) i wybranego rozwinięcia estymacji parametru kształtu p rozkładu GGD ze zmienną wielkością próby N dla wybranej ustalonej wartości $p = 5$ w generatorze GGD [H2]



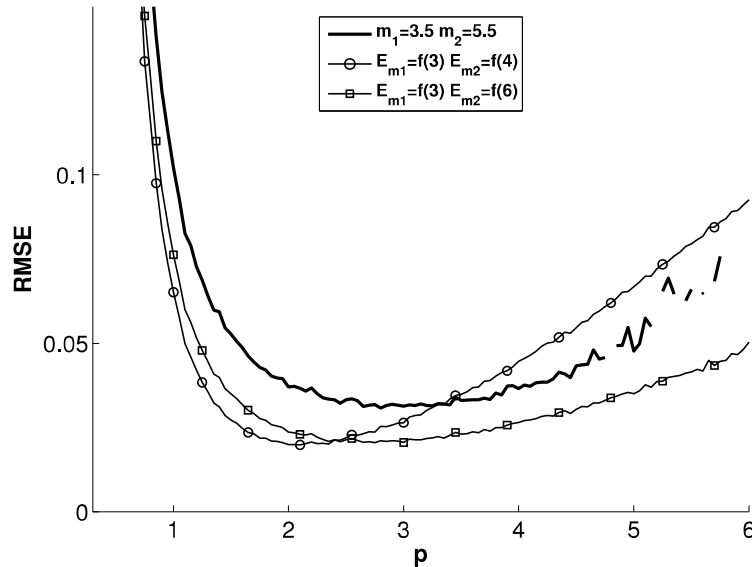
Rysunek 16: Porównanie RMSE dla metody MM ($m_1 = 4, m_2 = 8$) i wybranego rozwinięcia estymacji parametru kształtu p rozkładu GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i wybranej stałej wielkości próby $N = 169$ [H2]



Rysunek 17: Porównanie RMSE dla metody MM ($m_1 = 3.5, m_2 = 5.5$) i wybranego rozwinięcia estymacji parametru kształtu p rozkładu GGD ze zmienną wielkością próby N dla wybranej ustalonej wartości $p = 6$ w generatorze GGD [H2]



Rysunek 18: Porównanie RMSE dla metody MM ($m_1 = 3.5, m_2 = 5.5$) i wybranego rozwinięcia estymacji parametru kształtu p rozkładu GGD ze zmienną wielkością próby N dla wybranej ustalonej wartości $p = 5$ w generatorze GGD [H2]



Rysunek 19: Porównanie RMSE dla metody MM ($m_1 = 3.5$, $m_2 = 5.5$) i wybranego rozwinięcia estymacji parametru kształtu p rozkładu GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i wybranej stałej wielkości próby $N = 300$ [H2]

przedziału p porównano na rysunku 19. Można zauważyć, że rozszerzenia spowodowały zmniejszenie RMSE i zapewnienie zbieżności dla szerszego zakresu p . Dla jednego z rozwinięć, tj. $E_{m_1} = f(3)$ i $E_{m_2} = f(4)$ obserwuje się wzrost RMSE w stosunku do obliczenia momentów bez rozwinięcia, ale wyniki są stabilne dla szerszego zakresu p .

To samo podejście można zastosować do innych momentów wyższego rzędu (zarówno całkowitych, jak i rzeczywistych rzędów momentów), ale nie wszystkie rozwinięcia prowadzą do lepszych rozwiązań.

Opracowana metoda nie stanowi lepszego rozwiązania w stosunku do innych metod estymacji dla małej liczebności próby, ponieważ jest w pełni oparta na modelu MM, ale **poprawia zbieżność popularnej metody MM dla momentów wyższego rzędu i małej liczebności próby, a także zmniejsza względny błąd średniokwadratowy** [H2]. Wyniki eksperymentalne porównania ze znaną już metodą MM pokazują, że zaproponowana metoda jest bardzo użyteczna z praktycznego punktu widzenia.

Aproksymowany szybki estymator parametru kształtu uogólnionego rozkładu Gaussa dla małej liczebności próby

Jak zostało wspomniane, większość estymatorów parametru kształtu GGD zakłada przypadek asymptotyczny, gdy dostępna jest nieskończona liczba obserwacji, ale w rzeczywistym przypadku dostępny jest tylko zbiór o ograniczonej wielkości, dlatego w celu przewyciężenia tego ograniczenia **w dalszych pracach badawczych nad estymacją parametru kształtu GGD dla małej wielkości próbki wprowadzono w [H3] nową, szybką metodę aproksymowaną opartą na znormalizowanym momencie. Metoda ta nie wymaga obszernej tabeli z wartościami, numerycznego poszukiwania rozwiązania równania nieliniowego, nie wymaga przeszukiwania tablicy wartości ani podejścia wieloetapowego, dlatego nadaje się do przetwarzania danych w czasie rzeczywistym. Estymator ten nie tylko posiada mniejszą wariancję dla rozpatrywanego przedziału parametru kształtu p , ale także ma mniejszy nakład obliczeń wymagany do wyznaczenia tego parametru.**

Poprzednio opracowana metoda [H2] dla małej liczebności próby, ponieważ bazuje na metodzie momentów, posiada pewne ograniczenie w postaci konieczności ustalenia rzędów momentów i nie wskazuje, jaka powinna być ich wartość. W przypadku tej metody ograniczenie to zostało wyeliminowane.

Nowy estymator parametru kształtu został opracowany bazując na równaniu metody momentów (7)

na podstawie dwóch różnych wartości rzędów momentów m_1 i m_2

$$g = \frac{\Gamma\left(\frac{m_2+1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{m_2}{m_1}-1}}{\Gamma\left(\frac{m_1+1}{p}\right)^{\frac{m_2}{m_1}}} = \frac{E_{m_2}}{(E_{m_1})^{\frac{m_2}{m_1}}}. \quad (38)$$

Funkcja odwrotna do funkcji g (równanie (38)) zależy od wartości rzędów momentów m_1 i m_2 i może być aproksymowana w następujący sposób [H3]:

- $m_1 = 0.25$ i $m_2 = 0.5$

$$\hat{p}_0 = \begin{cases} 55 \cdot g^{-70} + 0.73, & \text{dla } g < 1.079 \\ 5.7 \cdot g^{-28} + 0.315, & \text{dla } g \geq 1.079 \\ \quad \wedge g < 1.132 \\ 2.05 \cdot g^{-15} + 0.18, & \text{dla } g \geq 1.132 \end{cases}, \quad (39)$$

- $m_1 = 0.5$ i $m_2 = 1$

$$\hat{p}_1 = \begin{cases} 26 \cdot g^{-18} + 0.67, & \text{dla } g < 1.27 \\ 5.5 \cdot g^{-9} + 0.365, & \text{dla } g \geq 1.27 \end{cases}, \quad (40)$$

- $m_1 = 1$ i $m_2 = 2$

$$\hat{p}_2 = \begin{cases} 29 \cdot g^{-7} + 0.8, & \text{dla } g < 2 \\ 5 \cdot g^{-3} + 0.37, & \text{dla } g \geq 2 \end{cases}, \quad (41)$$

- $m_1 = 2$ i $m_2 = 3$

$$\hat{p}_3 = \begin{cases} 77 \cdot g^{-10} + 1.275, & \text{dla } g < 1.6 \\ 16.3 \cdot g^{-5.5} + 0.748, & \text{dla } g \geq 1.6 \end{cases}, \quad (42)$$

- $m_1 = 2$ i $m_2 = 4$

$$\hat{p}_4 = \begin{cases} 12 \cdot g^{-1.98} + 0.64, & \text{dla } g < 6 \\ 6 \cdot g^{-1.3} + 0.42, & \text{dla } g \geq 6 \end{cases}, \quad (43)$$

-

$$\hat{p}_{04} = 0.5 \cdot (\hat{p}_0 + \hat{p}_4). \quad (44)$$

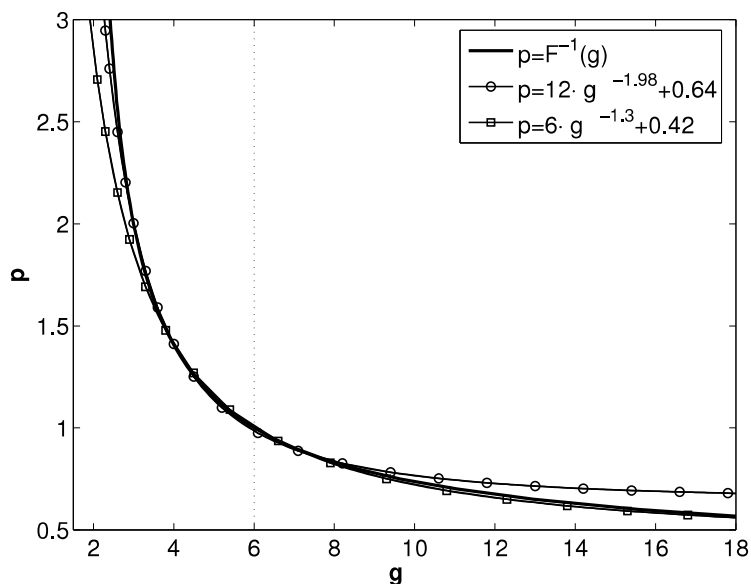
Równanie (43) dla dwóch rzędów momentów $m_1 = 2$ i $m_2 = 4$ powiązane jest z kurtozą. Funkcja odwrotna równania (38) dla dwóch rzędów momentów $m_1 = 2$ i $m_2 = 4$ została przedstawiona na rysunku 20.

Dodatkowo, na tym samym rysunku zostały przedstawione dwie składowe (43) aproksymujące tę funkcję oraz wartość progowa $g = 6$. Można zauważyć, że funkcja odwrotna jest lepiej aproksymowana przez jedną składową powyżej wartości progowej $g = 6$ i przez drugą składową poniżej tej wartości. Należy zaznaczyć, że model zastosowany do aproksymacji funkcji odwrotnej do funkcji g (38) różni się od modelu wprowadzonego w [63] (równanie (8)). Równania (39)–(43) otrzymano przez dopasowanie funkcji odwrotnej równania (38) do modelu $a \cdot g^{-b} + c$.

Zbadane zostały również inne zestawy dla rzędów momentów: $m_1 = 0.1$ i $m_2 = 0.5$; $m_1 = 0.125$ i $m_2 = 0.25$. Niemniej jednak równania (39)–(44) stały się najbardziej użyteczne w ostatecznej estymacji, tj. doprowadziły do najmniejszego błędu. Ostateczną estymację \hat{p}_S można znaleźć z następującej relacji [H3]:

$$\hat{p}_S = \begin{cases} \hat{p}_4, & \text{dla } \hat{p}_1 \geq 1.86 \\ \hat{p}_{04}, & \text{dla } 1.04 \leq \hat{p}_1 < 1.86 \\ \hat{p}_1, & \text{dla } 0.57 \leq \hat{p}_1 < 1.04 \\ \hat{p}_0, & \text{dla } \hat{p}_1 < 0.57 \end{cases}, \quad (45)$$

gdzie \hat{p}_0 , \hat{p}_1 , \hat{p}_{04} i \hat{p}_4 są zdefiniowane odpowiednio przez równania (39), (40), (44) i (43). \hat{p}_1 została wybrana jako wartość odniesienia w (45), ponieważ ma najmniejszy błąd RMSE (37) i jest stała w najszerszym przedziale rozważanego przedziału p z rozważanych przybliżeń.



Rysunek 20: Funkcja odwrotna równania (38) dla dwóch rzędów momentów $m_1 = 2$ i $m_2 = 4$ i dla dwóch składowych z równania (43) [H3]

Badania eksperymentalne działania aproksymowanego szybkiego estymatora parametru kształtu uogólnionego rozkładu Gaussa dla małej liczebności próby

Estymator ten został zbadany korzystając z generatora GGD [67] ze stałą wariancją równą jeden i zmiennym parametrem kształtu w zakresie $p \in \langle 0.3, 3 \rangle$. Wartości zostały dobrane tak, aby obejmowały zakres najbardziej typowych wartości w zastosowaniach przetwarzania sygnałów. Do porównania wyników estymatorów zastosowano RMSE (37). Liczbę powtórzeń dla wszystkich eksperymentów ustalono na $M = 10^4$.

Mała liczebność próby może powodować trudności ze znalezieniem pierwiastka metody ML (3), dlatego warunek zatrzymania poszukiwania rozwiązań został ustawiony na $tolX = 1e-4$ i $tolY = 1e-5$, gdzie $tolX$ i $tolY$ są błędami bezwzględnymi.

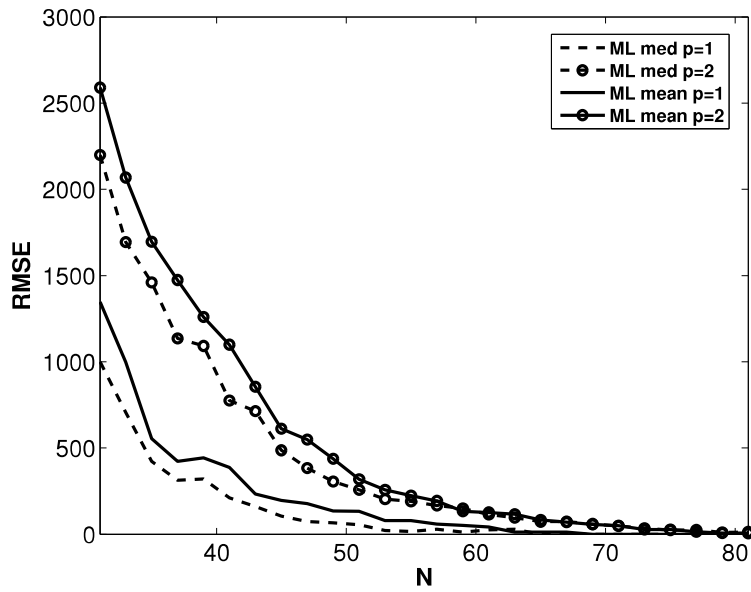
Wzrost RMSE wraz ze zmniejszaniem się wielkości próby dla metody ML przedstawiono na rysunku 21. Krzywe są wykreślone dla dwóch wybranych stałych wartości parametru kształtu $p = 1$ i $p = 2$ w generatorze GGD. W pierwszym kroku zbiór obserwacji jest wyśrodkowany. Można to zrobić odejmując albo średnią wartość zestawu, albo wartość mediany zestawu. Okazuje się, że ma to wpływ na ostateczny błąd oszacowania. Przed estymacją metodą ML liczebność próby wyśrodkowano dwójako: *ML med* – od próby odejta jest wartość mediany; *ML mean* – wartość średnia odejta jest od próbki. Można zauważyć, że przy małej liczebności próby metoda ML skutkowała bardzo dużą wartością błędu wyrażoną w RMSE (rysunek 21). Dodatkowo na rysunku 21 widoczne jest, że mniejszy RMSE jest zapewniony przez odjęcie wartości mediany.

Podobne zachowanie obserwuje się dla wcześniej opracowanej metody przybliżonej (Approx, równanie (8)), tj. odjęcie wartości średniej skutkowało wyższą wartością RMSE. Dlatego, gdy w tej sekcji zostaną zademonstrowane wyniki dla metod Approx i ML, będą one oparte na wyśrodkowaniu przy użyciu mediany.

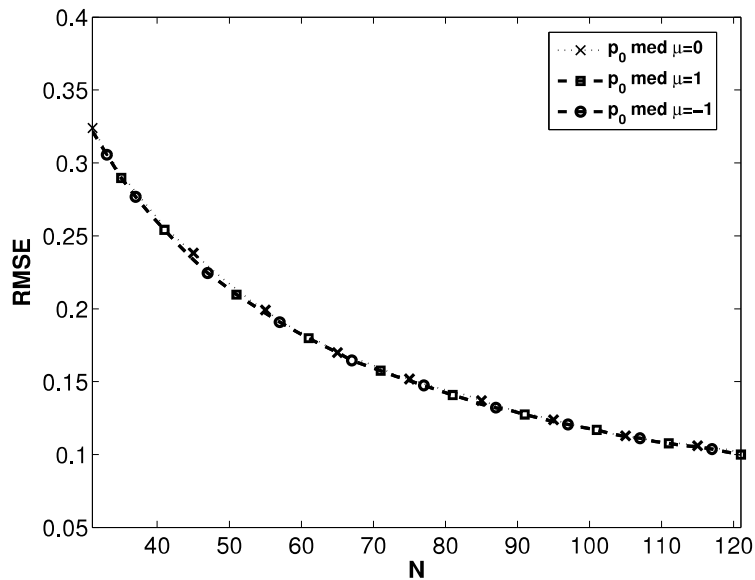
Najpierw należy wyznaczyć parametr lokalizacji μ po zebraniu próbki zmiennej losowej GGD. Estymację parametru μ można przeprowadzić dwójako: jako średnią lub jako medianę. Następnie dokonuje się centrowanie przez odjęcie estymacji parametru μ . Rysunek 22 przedstawia trzy krzywe z wyśrodkowaniem za pomocą mediany dla parametrów lokalizacji w generatorze GGD: $\mu = -1$, $\mu = 0$ i $\mu = 1$ dla \hat{p}_0 (równanie (39)). Można zauważyć, że krzywe te pokrywają się.

Podobnie na rysunku 23 zostały wykreślone trzy krzywe z wyśrodkowaniem za pomocą średniej dla parametrów lokalizacji w generatorze GGD: $\mu = -1$, $\mu = 0$ i $\mu = 1$ dla \hat{p}_1 (równanie (40)). W tym przypadku krzywe również zachodzą na siebie.

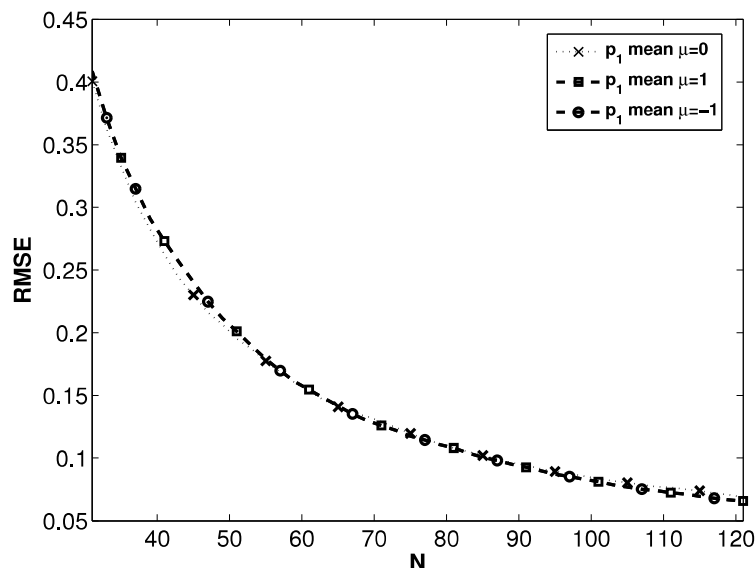
Rysunek 24 przedstawia wpływ odejmowania mediany i średniej dla dwóch wybranych składowych



Rysunek 21: Porównanie RMSE dla metody ML estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wielkości próby N oraz dla wybranych wartości stałych $p = 1$ i $p = 2$ w generatorze GGD. *ML med* – mediana odjęta jest od próbki przed estymacją. *ML mean* – wartość średnia odjęta jest od próbki przed estymacją [H3]



Rysunek 22: Porównanie RMSE dla składnika \hat{p}_0 (równanie (39)) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wielkości próby N oraz ustalonej wartości $p = 2$ i trzech wartości parametrów lokalizacji $\mu = -1$, $\mu = 0$ i $\mu = 1$ w generatorze GGD, oraz centrowaniem za pomocą mediany [H3]



Rysunek 23: Porównanie RMSE dla składnika \hat{p}_1 (równanie (40)) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wielkości próby N oraz ustalonej wartości $p = 2$ i trzech wartości parametrów lokalizacji $\mu = -1$, $\mu = 0$ i $\mu = 1$ w generatorze GGD, oraz centrowaniem za pomocą średniej [H3]

\hat{p}_0 (równanie (39)) i \hat{p}_1 (równanie (40)). Odejmovanie mediany dało mniejszą wartość RMSE zarówno dla \hat{p}_0 (równanie (39)), jak i \hat{p}_1 (równanie (40)) w porównaniu z odejmowaniem wartości średniej.

RMSE dla równania końcowego (\hat{p}_S , równanie (45)) przedstawiono na rysunku 25. Krzywą można porównać ze wszystkimi składnikami równania (równania (39) – (44)) dla małej wielkości próby $N = 31$. Wartość mediany jest odjęta od próbki przed estymacją. Metoda ma na celu utrzymanie stałego RMSE (przynajmniej nie rosnącego) w rozważanym zakresie p .

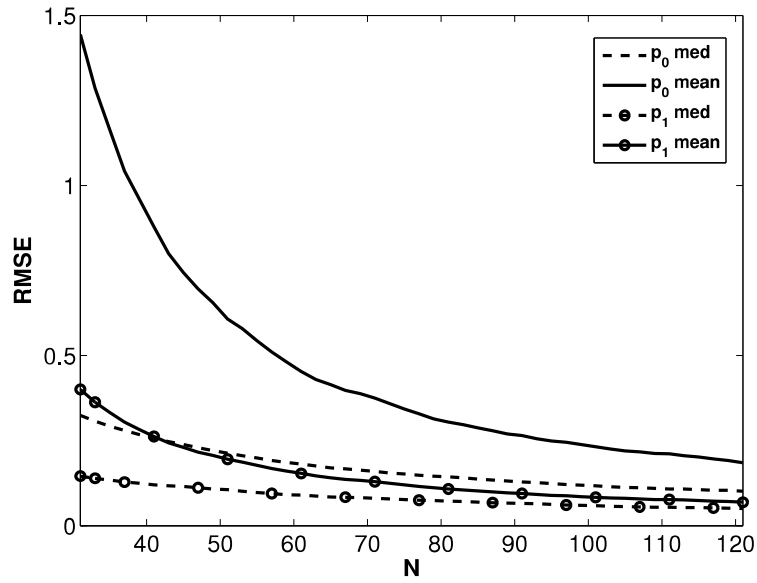
Rysunek do porównania RMSE dla metod \hat{p}_S (45), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i wybranej ustalonej liczebności próby $N = 31$ nie został przedstawiony ze względu na nadmierny błąd metody ML. Wybrano najmniejszą wartość $N = 71$, która byłaby reprezentatywna do porównania metod \hat{p}_S (45), ML (3), Approx (8). Przypadek ten przedstawiono na rysunku 26. Na rysunku tym widoczne jest, że wykres dla metody Approx (8) nie jest kompletny. Przy bliższej inspekcji można zauważyć nieciągłości krzywej. Taki przypadek oznacza, że wartość wynikowa estymatora Approx ma co najmniej jedną wartość zespoloną. Zatem RMSE był niemożliwy do zastosowania i nieporównywalny. W przypadku ML, można zauważyć, że wraz ze wzrostem wartości p w generatorze GGD, RMSE jest zaburzony i gwałtownie rośnie. W tym przypadku również wartość mediany jest odjęta od próbki przed estymacją.

Podobny wykres dla $N = 121$ przedstawiono na rysunku 27, gdzie zgodnie z oczekiwaniami RMSE dla ML został zmniejszony. W obu przypadkach wprowadzony estymator (równanie (45)) zachowuje się stabilnie, a RMSE dla niego jest najmniejszy lub porównywalny.

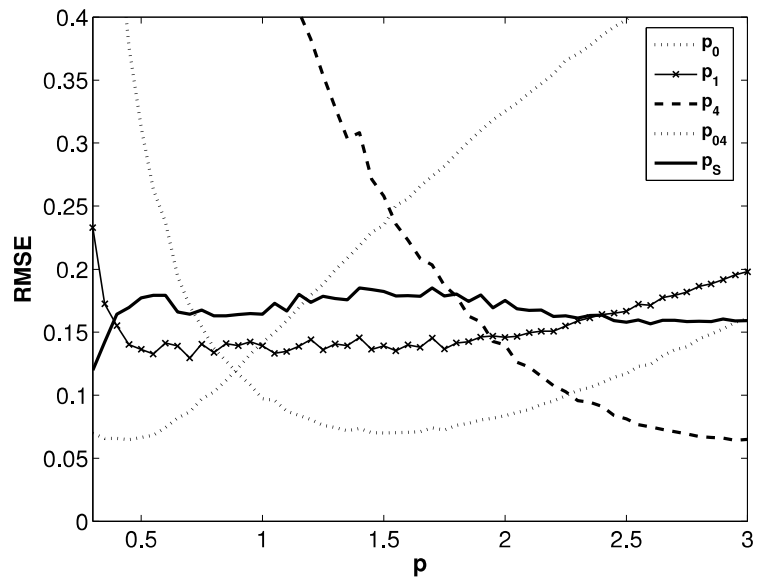
Z rysunków 28 i 29 można odczytać, że \hat{p}_S jest stabilny przy małych wartościach N , podczas gdy RMSE szybko rośnie dla ML lub przyjmuje wartości zespolone dla Approx (8). Dla tych obu symulacji liczbę powtórzeń w równaniu (37) zwiększono do $M = 10^5$. Wartość mediany jest odejmowana od próbki przed estymacją.

Na rysunku 30, została wykreślona wartość RMSE dla \hat{p}_S dla dwóch przypadków, gdy wartość średnia ($\hat{p}_S \text{ mean}$) i mediana ($\hat{p}_S \text{ med}$) są odejmowane od próbki przed estymacją. Można zauważyć, że przy wyższych wartościach p generatora GGD odjęcie średniej skutkowało mniejszą wartością RMSE. Wartość średnia tych dwóch wartości $\hat{p}_S \text{ med mean} = 0.5 \cdot (\hat{p}_S \text{ mean} + \hat{p}_S \text{ med})$ może dać oszacowanie, które da najniższy RMSE w krótkim przedziale w okolicy $p = 2$. Te krzywe sugerują, aby wykonać ich kombinację, na przykład $\hat{p}_S \text{ join} = [if (\hat{p}_S \text{ med} < 2) \text{ then } (\hat{p}_S \text{ med}) \text{ else } (\hat{p}_S \text{ med mean})]$, ale tak utworzona krzywa $\hat{p}_S \text{ join}$ nie dała lepszego wyniku RMSE ze względu na to, że punkt decyzyjny $\hat{p}_S \text{ med}$ jest obciążony błędem.

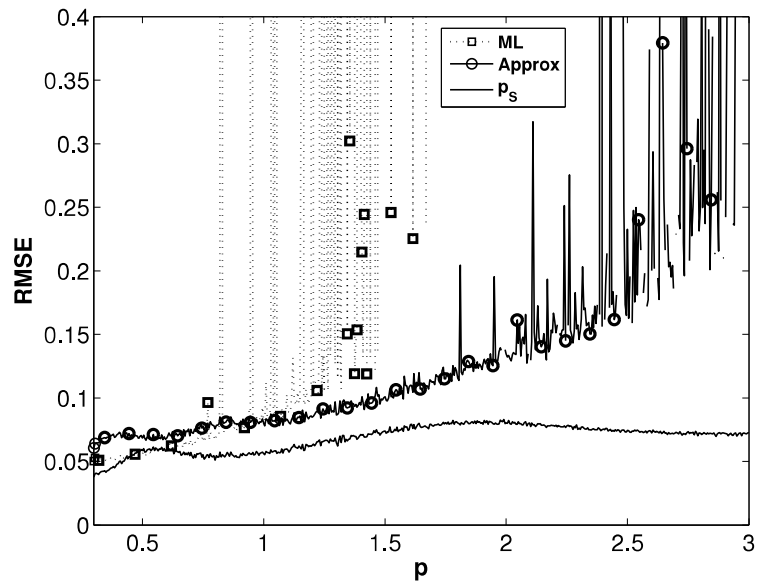
W celu zbadania estymatora dla dużej próby przyjęto $N = 1000$ i $N = 2000$, a wyniki przedstawiono



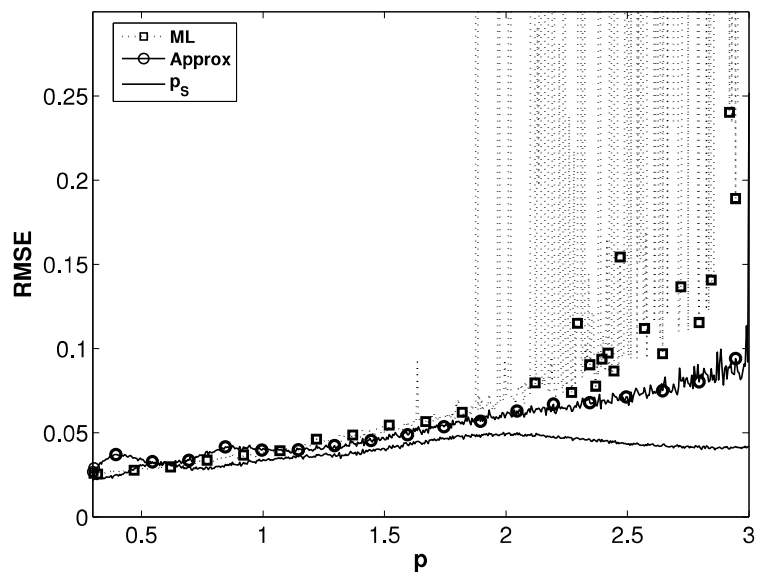
Rysunek 24: Porównanie RMSE dla składników \hat{p}_0 (równanie (39)) i \hat{p}_1 (równanie (40)) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wielkości próby N oraz ustalonej wartości $p = 2$ w generatorze GGD. *med* i *mean* – odpowiednio wartość mediany i wartość średnia odejęte są od próbki przed estymacją [H3]



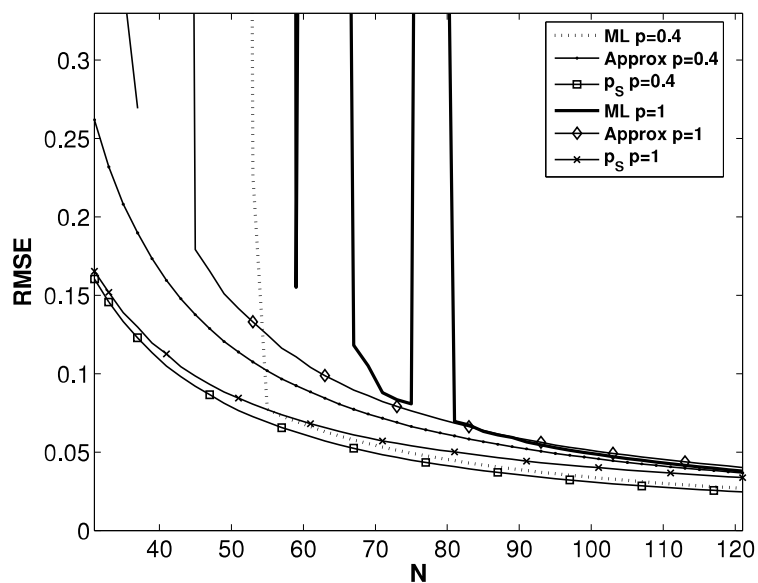
Rysunek 25: Porównanie RMSE zarówno dla wszystkich składników (równania (39)–(44)) i równania końcowego (\hat{p}_S , równanie (45)) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i ustalonej wielkości próby $N = 31$ [H3]



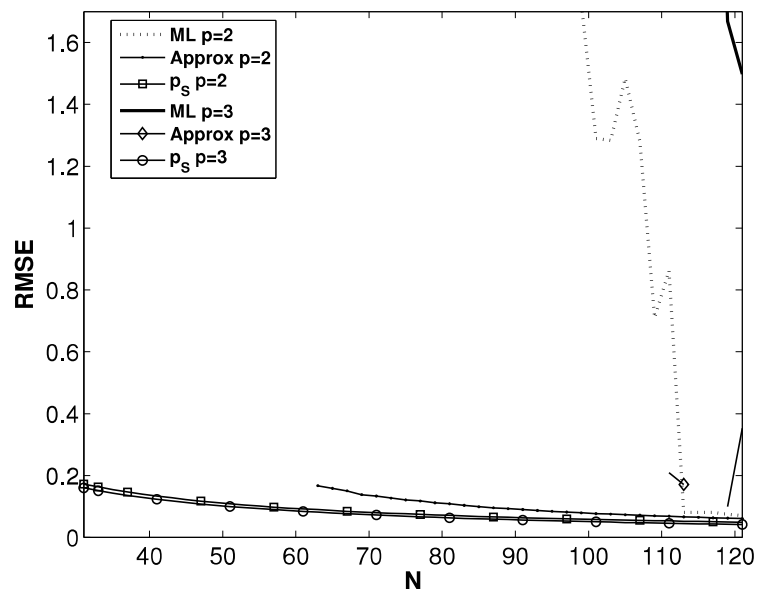
Rysunek 26: Porównanie RMSE dla metod \hat{p}_S (45), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i wybranej ustalonej liczebności próby $N = 71$ [H3]



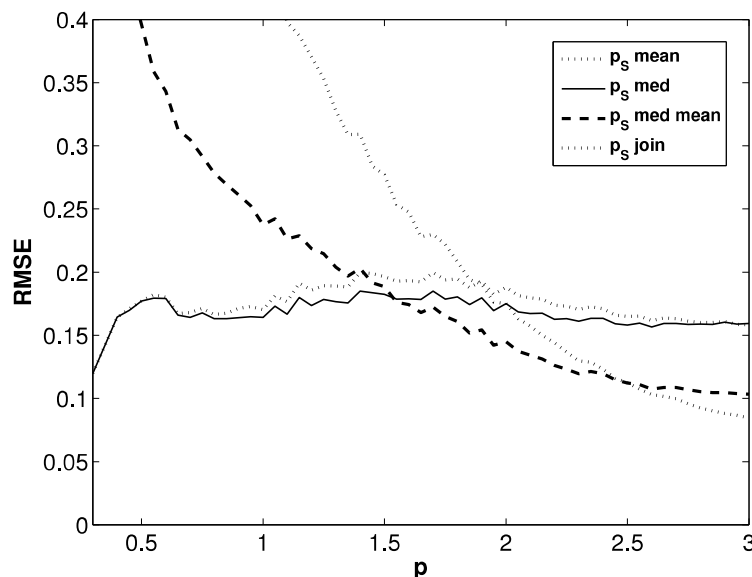
Rysunek 27: Porównanie RMSE dla metod \hat{p}_S (45), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i wybranej ustalonej liczebności próby $N = 121$ [H3]



Rysunek 28: Porównanie RMSE dla metod \hat{p}_S (45), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wielkości próby N oraz dla wybranych wartości stałych parametru kształtu $p = 0.4$ i $p = 1$ w generatorze GGD [H3]



Rysunek 29: Porównanie RMSE dla metod \hat{p}_S (45), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wielkości próby N oraz dla wybranych wartości stałych parametru kształtu $p = 2$ i $p = 3$ w generatorze GGD [H3]



Rysunek 30: Porównanie RMSE dla \hat{p}_S (równanie (45)) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i wybranej ustalonej liczebności próby $N = 31$. \hat{p}_S med – mediana jest odjęta od próbki przed estymacją. \hat{p}_S mean – wartość średnia jest odjęta od próbki przed estymacją. \hat{p}_S med mean – wartość średnia estymacji \hat{p}_S med i \hat{p}_S mean. \hat{p}_S join – kombinacja \hat{p}_S med i \hat{p}_S med mean [H3]

na rysunkach 31 i 32. W tej symulacji i następnych przed oszacowaniem od próby odejmowana jest wartość mediany. Wartość RMSE metody ML (3) i Approx (8) jest stabilna w przedziale $p \in \langle 0.3, 3 \rangle$, podczas gdy \hat{p}_S podlega fluktuacjom.

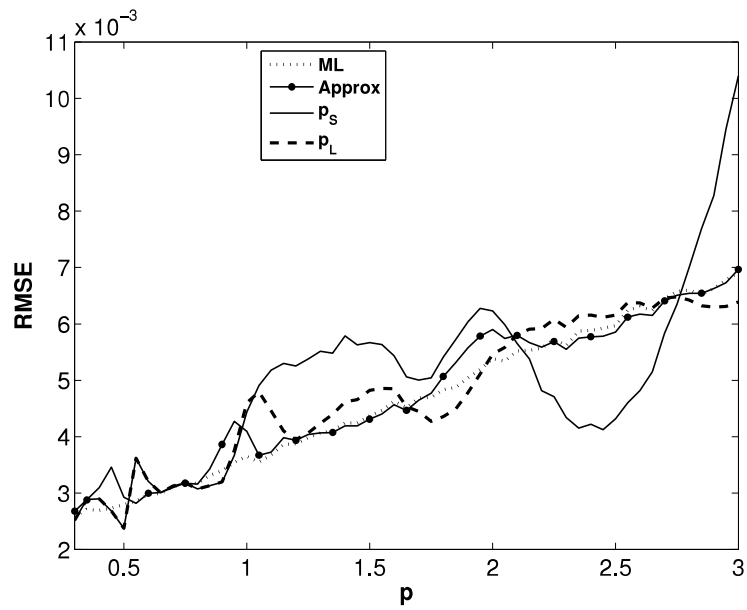
Ostateczną estymację \hat{p}_L z poprawką na większe wartości N i p można znaleźć z następującej zależności [H3]:

$$\hat{p}_L = \begin{cases} \hat{p}_3, & \text{dla } \hat{p}_1 \geq 1.86 \\ \hat{p}_2, & \text{dla } 1.04 \leq \hat{p}_1 < 1.86 \\ \hat{p}_1, & \text{dla } 0.57 \leq \hat{p}_1 < 1.04 \\ \hat{p}_0, & \text{dla } \hat{p}_1 < 0.57 \end{cases}, \quad (46)$$

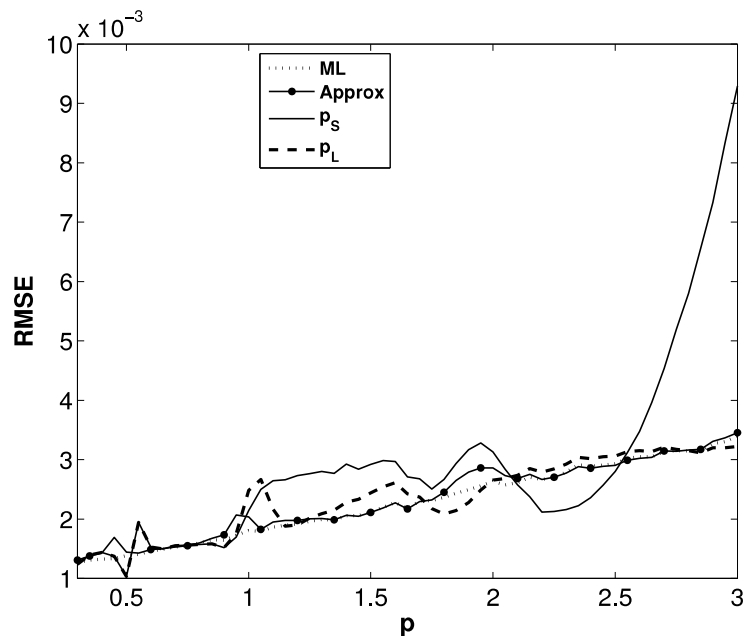
gdzie \hat{p}_0 , \hat{p}_1 , \hat{p}_2 i \hat{p}_3 są zdefiniowane odpowiednio przez równania (39), (40), (41) i (42).

Dla $N \in (450, 2000)$ i $p = 0.4$ metoda \hat{p}_S daje wyniki porównywalne z \hat{p}_L (rysunek 33). Na rysunkach 34, 35 i 36 przedstawiono inne wykresy \hat{p}_S i \hat{p}_L dla $N \in (450, 2000)$ i $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$. Dla większych wartości N wahania \hat{p}_S w przedziale $p \in \langle 2, 3 \rangle$ (rysunki 31 i 32) można skorygować stosując \hat{p}_L . Dlatego zaleca się użycie \hat{p}_L zamiast \hat{p}_S dla większych wartości N i p .

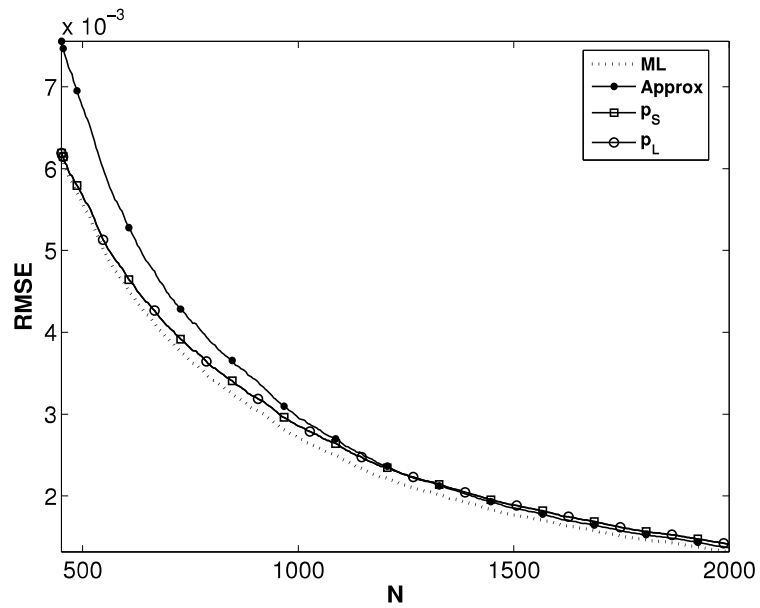
Podsumowując, *dzięki nowej opracowanej metodzie [H3] estymacji parametru kształtu p rozkładu GGD możliwe stało się wyznaczenie parametru p dla małych liczebności prób, gdzie inne estymatory nie posiadają rozwiązania, nie mają rzeczywistego pierwiastka lub posiadają dużą wariancję, co czyni uzyskany dla nich wynik estymacji bezużytecznym.* Przedstawiona metoda pozwala oszacować parametr kształtu GGD w przedziale $p \in \langle 0.3, 3 \rangle$ dla małej liczebności próby. Co więcej, *metoda nie wymaga szukania pierwiastka, żadnej długiej tablicy przeglądowej ani wieloetapowego podejścia, dzięki czemu jest prosta, szybka i stosunkowo wydajna. Przedstawiona metoda utrzymuje relatywnie mały błąd RMSE w przedziale $p \in \langle 0.3, 3 \rangle$ dla małej liczebności próby*, co potwierdziły symulacje, podczas gdy inne metody miały nadmierny błąd w części przedziału, np. dla $N = 71$ (rysunek 26) metoda ML dla $p > 0.75$ i metoda Approx (8) dla $p > 1.6$. Symulacje wykazały również powolny wzrost RMSE wraz ze zmniejszaniem się wielkości próby do $N = 31$ dla nowej metody, podczas gdy inne metody przyjmowały duże wartości RMSE dla pewnej progowej wielkości próby. Zaobserwowano to dla symulacji dla parametru kształtu $p = 0.4$, $p = 1$, $p = 2$ i $p = 3$ (rysunki 28 i 29).



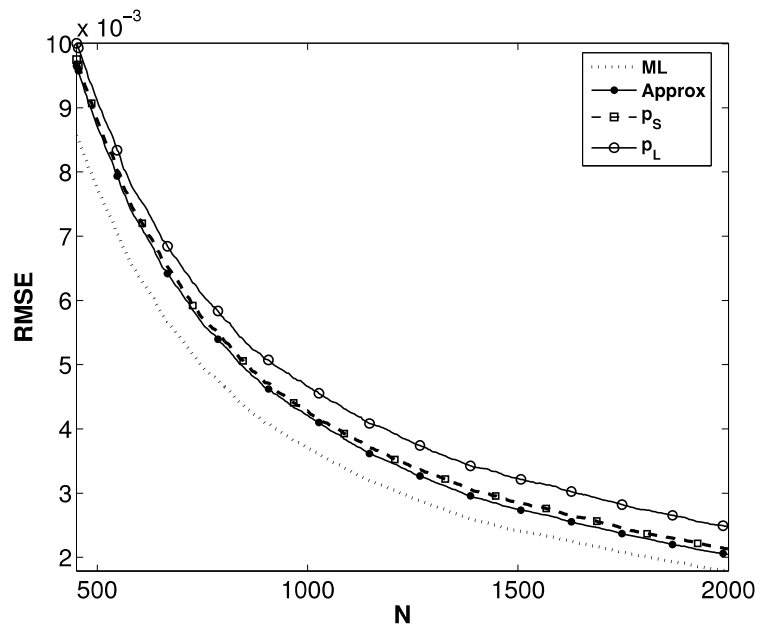
Rysunek 31: Porównanie RMSE dla metod \hat{p}_S (45), \hat{p}_L (46), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i wybranej ustalonej liczebności próby $N = 1000$ [H3]



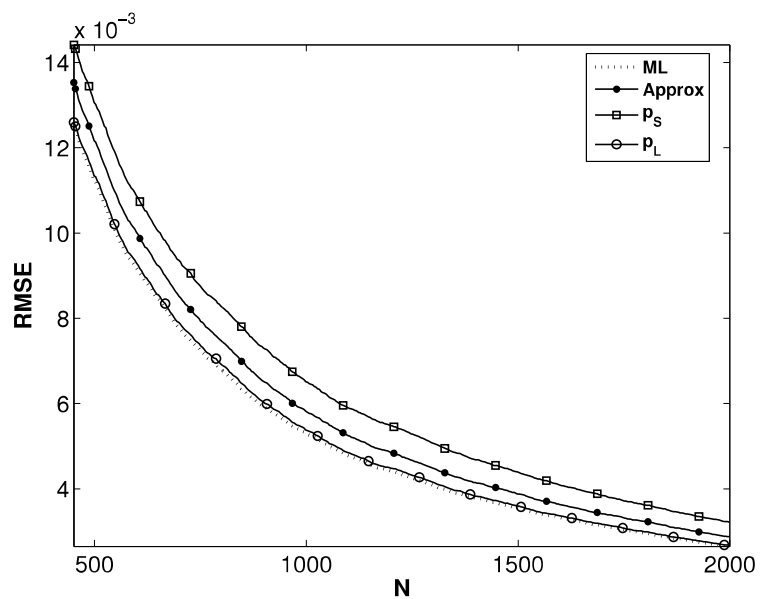
Rysunek 32: Porównanie RMSE dla metod \hat{p}_S (45), \hat{p}_L (46), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wartości parametru kształtu p i wybranej ustalonej liczebności próby $N = 2000$ [H3]



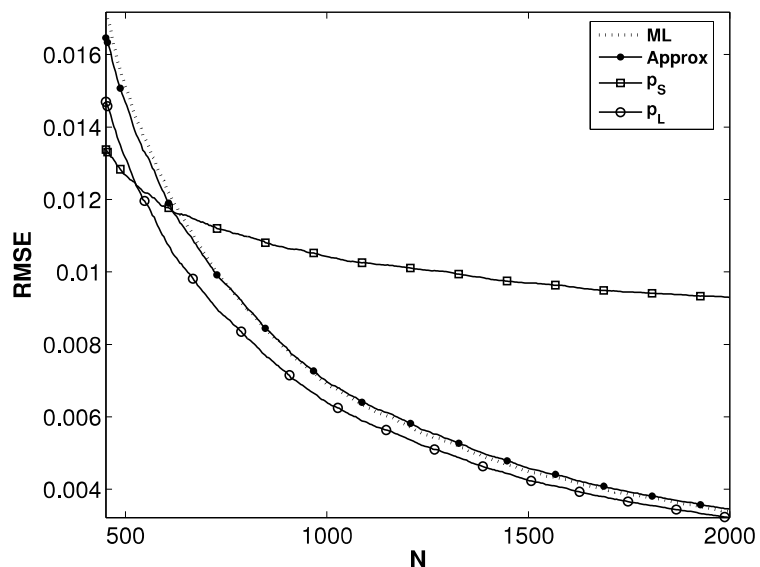
Rysunek 33: Porównanie RMSE dla metod \hat{p}_S (45), \hat{p}_L (46), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wielkości próby N oraz dla wybranej wartości stałej parametru kształtu $p = 0.4$ w generatorze GGD [H3]



Rysunek 34: Porównanie RMSE dla metod \hat{p}_S (45), \hat{p}_L (46), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wielkości próby N oraz dla wybranej wartości stałej parametru kształtu $p = 1$ w generatorze GGD [H3]



Rysunek 35: Porównanie RMSE dla metod \hat{p}_S (45), \hat{p}_L (46), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wielkości próby N oraz dla wybranej wartości stałej parametru kształtu $p = 2$ w generatorze GGD [H3]



Rysunek 36: Porównanie RMSE dla metod \hat{p}_S (45), \hat{p}_L (46), ML (3), Approx (8) estymacji parametru kształtu p GGD o zmiennej wielkości próby N oraz dla wybranej wartości stałej parametru kształtu $p = 3$ w generatorze GGD [H3]

Tabela 1: Parametry kształtu GGD dla obrazu „Cameraman” [H4]

$C_{i,j}$	j=0	1	2	3	4	5	6	7
i=0	–	0.29	0.26	0.27	0.31	0.36	0.35	0.39
1	0.32	0.27	0.29	0.31	0.31	0.32	0.37	0.37
2	0.41	0.32	0.34	0.31	0.33	0.39	0.37	0.40
3	0.42	0.38	0.40	0.37	0.42	0.40	0.42	0.44
4	0.39	0.41	0.41	0.40	0.38	0.45	0.46	0.49
5	0.40	0.46	0.46	0.46	0.44	0.47	0.49	0.52
6	0.49	0.52	0.52	0.53	0.53	0.47	0.50	0.54
7	0.51	0.49	0.54	0.53	0.59	0.52	0.54	0.55

Tabela 2: Parametry kształtu GGD dla obrazu „Cameraman”, gdzie co najmniej 95% współczynników DCT było niezerowych po dekwantyzacji [H4]

$C_{i,j}$	j=0	1	2	3	4	5	6	7
i=0	–	0.29	0.26	0.27	0.31	0.36	0.35	0.39
1	0.32	0.27	0.29	0.31	0.31	0.32	0.37	0.37
2	0.41	0.32	0.34	0.31	0.33	0.39	–	–
3	0.42	0.38	0.40	0.37	0.42	–	–	–
4	0.39	0.41	0.41	0.40	–	–	–	–
5	0.40	0.46	–	–	–	–	–	–
6	0.49	–	–	–	–	–	–	–

4.3.4 Uogólniony rozkład Gaussa z parametrem kształtu $p = 1/3$

Wspomniano, że uogólniony rozkład Gaussa obejmuje rozkład Gaussa ($p = 2$) i rozkład Laplace’a ($p = 1$). W literaturze analizowane były sygnały o rozkładzie GGD dla $p < 1$, dlatego Chapeau-Blondeau i Monir [69] zaproponowali dodatkowo model dla $p = 0.5$. Jeżeli $p \rightarrow 0$, to funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ zbliża się do funkcji impulsowej. Pokazali, że ograniczając potęgę rozkładu do wartości 0.5 można uprościć obliczenia i przedstawić równania w postaci jawnej. W badaniach przed doktoratem pokazano, że pozwoliło to na poprawę rekonstrukcji obrazu na podstawie skwantowanych współczynników DCT [66].

Dlatego w [H4] został zaproponowany model $p = 1/3$, który pozwala modelować sygnały o jeszcze bardziej impulsowym rozkładzie. Ograniczając się do szczególnych przypadków rozkładu GGD, można wyznaczyć równania w postaci jawnej i uprościć analizę sygnałów. Przyjmując sygnał źródłowy o rozkładzie GGD z parametrem kształtu $p = 1/3$ zostały wyznaczone równania rekonstrukcji względem środka ciężkości w postaci jawnej. Wyprowadzono metodę największej wiarygodności dla dyskretnego GGD $p = 1/3$, która wymaga oszacowania tylko jednego parametru.

Tabela 1 zawiera zebrane wyniki estymacji parametrów kształtu GGD dla obrazu „Cameraman” (rysunek 37). Obraz jest monochromatyczny o rozmiarze 256×256 pikseli. DCT wykonano dla bloku 8×8 . Estymację parametrów kształtu GGD zastosowano do współczynników DCT. $C_{i,j}$ oznacza współczynnik w wierszu i i kolumnie j w bloku 8×8 współczynników DCT. Indeksy współczynników DCT $C_{i,j}$ należą do przedziału $i, j \in \langle 0, 7 \rangle$, gdzie $C_{0,0}$ odpowiada współczynnikowi DC². Pozostałe współczynniki oznaczane są jako AC.

Tabela 2 została wyznaczona na podstawie wartości z tabeli 1 w celu sprawdzenia, które rozkłady dostępne są dla dekodera. Jeżeli po dekwantyzacji co najmniej 95% współczynników DCT było niezerowych, rozkład był brany pod uwagę. W przeciwnym razie parametry kształtu były pomijane, co skutkuje zredukowaną tabelą. Brak współczynników po stronie dekodera wynika z procesu kompresji stratnej i zerowaniu współczynników przez koder.

Na podstawie tabeli 2 można zauważyć, że dostępne rozkłady po stronie dekodera mają wartości parametrów kształtu GGD zbliżone do wartości $p = 1/3$. Dlatego rozkłady te są odpowiednie do

²Współczynnik składowej stałej (ang. direct current)



Rysunek 37: Obraz „Cameraman” [H4]

modelowania za pomocą GGD z parametrem potęgowym $p = 1/3$. Oczywiście zależy to od obrazu źródłowego, gdzie, na przykład, dla obrazów „Lenna” (rysunek 38) i „Barbara” (rysunek 39) rozkłady są bardziej zbliżone do GGD $p = 0.5$ [66].

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla uogólnionego rozkładu Gaussa z parametrem kształtu $p = 1/3$ dla zmiennej losowej ciągłej

Szczególny przypadek funkcji gęstości GGD z wykładnikiem $p = 1/3$ zmiennej losowej ciągłej otrzymuje się przez podstawienie wartości $p = 1/3$ do równania (1) i wynosi [H4]

$$f(x) = \frac{\lambda}{12} e^{-[\lambda \cdot |x|]^{1/3}}. \quad (47)$$

Dystrybuantę uzyskuje się przez całkowanie równania

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz, \quad (48)$$

co daje dystrybuantę GGD $p = 1/3$ [H4]

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-g} \cdot (2 + 2g + g^2), & \text{for } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{4} e^{-h} \cdot (2 + 2h + h^2), & \text{for } x > 0 \end{cases}, \quad (49)$$

gdzie

$$\begin{aligned} g &= (-\lambda \cdot x)^{1/3}, \\ h &= (\lambda \cdot x)^{1/3}. \end{aligned} \quad (50)$$

Zaletą ustalenia parametru kształtu jest to, że dystrybuantę GGD $p = 1/3$ można przedstawić w postaci jawnej.

Estymator największej wiarygodności dla ciągłego GGD $p = 1/3$ można otrzymać, znajdując funkcję największej wiarygodności równania (47), obliczając jej logarytm i maksymalizując ją względem λ . Po odpowiednich przekształceniach estymator przyjmuje postać [H4]

$$\lambda = \left(\frac{1}{3N} \sum_{i=1}^N |x_i|^{1/3} \right)^{-3}, \quad (51)$$

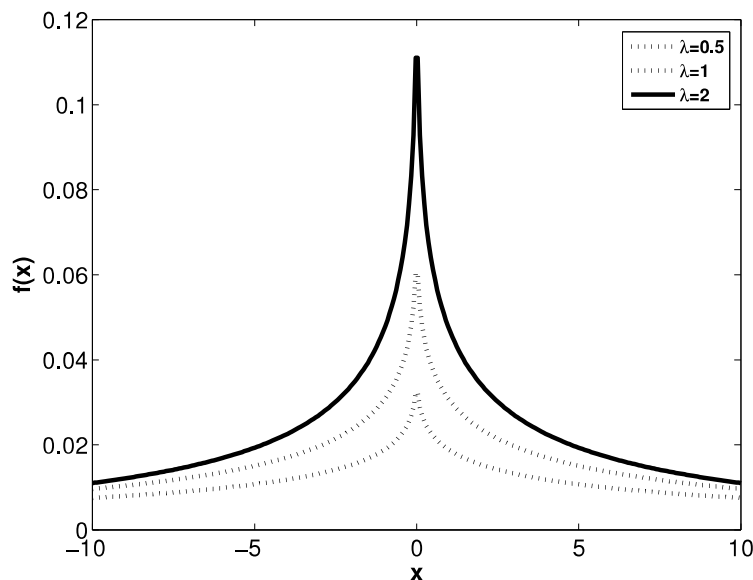
gdzie N oznacza liczbę obserwacji.



Rysunek 38: Obraz „Lenna”



Rysunek 39: Obraz „Barbara”



Rysunek 40: Funkcja gęstości GGD z wykładnikiem $p = 1/3$ dla zmiennej losowej ciągłej dla trzech wybranych parametrów λ [H4]

Rysunek 40 przedstawia funkcję gęstości GGD z wykładnikiem $p = 1/3$ dla zmiennej losowej ciągłej dla trzech wybranych parametrów λ .

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej o zerowej średniej jest zwykle przyjmowana dla współczynników przed kwantyzacją dostępnych dla enkodera.

Rozkład prawdopodobieństwa dla uogólnionego rozkładu Gaussa z parametrem kształtu $p = 1/3$ dla zmiennej losowej dyskretnej

Rozkład prawdopodobieństwa dla uogólnionego rozkładu Gaussa z parametrem kształtu $p = 1/3$ dla zmiennej losowej dyskretnej otrzymuje się przez całkowanie funkcji $f(x)$ (równanie (47)) w przedziale kwantyzacji $(Q \cdot i - 0.5 \cdot Q, Q \cdot i + 0.5 \cdot Q)$

$$P_i = \frac{\lambda}{12} \int_{(i-0.5) \cdot Q}^{(i+0.5) \cdot Q} e^{-[\lambda \cdot |x|]^{1/3}} dx, \quad (52)$$

gdzie Q wskazuje wartość kwantyzacji (współczynnik kwantyzacji), a i to skwantowana wartość (indeks przedziału kwantyzacji) gotowa do zakodowania i wysłania do dekodera. W wyniku całkowania otrzymuje się [H4]

$$\begin{cases} P_i &= \frac{1}{4} e^{-C_i} \cdot (2 + 2C_i + C_i^2) - \frac{1}{4} e^{-B_i} \cdot (2 + 2B_i + B_i^2) & i \neq 0 \\ P_0 &= 1 - \frac{1}{2} e^{-A} \cdot (2 + 2A + A^2) & i = 0 \end{cases}, \quad (53)$$

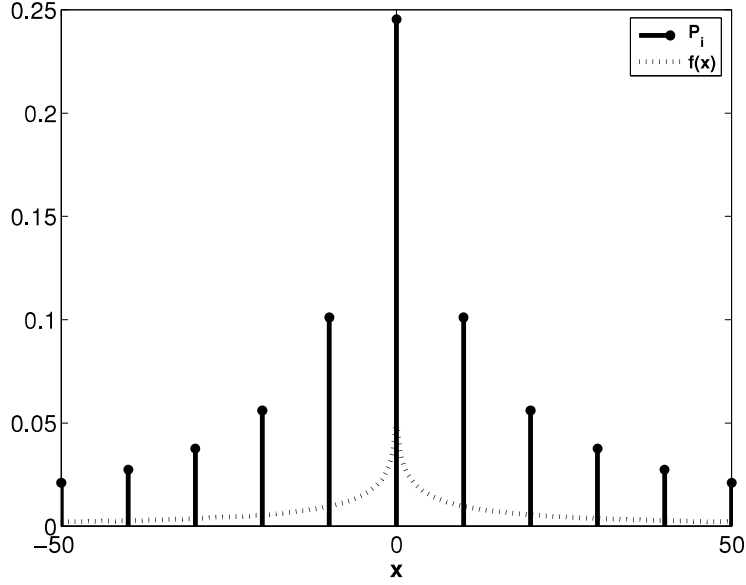
gdzie

$$\begin{aligned} A &= (0.5 \cdot \lambda \cdot Q)^{1/3}, \\ B_i &= (\lambda \cdot (|y_i| + 0.5 \cdot Q))^{1/3}, \\ C_i &= (\lambda \cdot (|y_i| - 0.5 \cdot Q))^{1/3}. \end{aligned} \quad (54)$$

W tym przypadku zrekonstruowane wartości wynoszą $y_i = i \cdot Q$.

Rysunek 41 przedstawia rozkład prawdopodobieństwa GGD zmiennej losowej dyskretnej P_i (równanie (53)) i funkcję gęstości prawdopodobieństwa GGD zmiennej losowej ciągłej $f(x)$ (równanie (47)) dla parametru $\lambda = 1$.

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej dyskretnej jest zwykle przyjmowany dla współczynników po dekwantyzacji dostępnych po stronie dekodera.



Rysunek 41: Rozkład prawdopodobieństwa GGD zmiennej losowej dyskretnej P_i (równanie (53)) i funkcja gęstości prawdopodobieństwa GGD zmiennej losowej ciągłej $f(x)$ (równanie (47)) dla parametru $\lambda = 1$ [H4]

Estymator wyznaczany metodą największej wiarygodności dla rozkładu dyskretnego można znaleźć podobnie jak dla dyskretnego źródła o rozkładzie Laplace'a [81] i opracowanego przed doktoratem dyskretnego rozkładu GGD $p = 0.5$ [66]. Należy wyznaczyć funkcję największej wiarygodności równania (53), obliczyć jej logarytm i następnie ją maksymalizować względem λ . Po odpowiednich przekształceniach estymator ML dyskretnego GGD $p = 1/3$ przyjmuje postać [H4]

$$\frac{N_0 \cdot e^{-A} \cdot Q}{P_0} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{e^{-B_i} \cdot B_i^3 - e^{-C_i} \cdot C_i^3}{P_i} = 0, \quad (55)$$

gdzie N_0 oznacza liczbę obserwacji równą zero, a N_1 oznacza liczbę obserwacji różną od zera. Musi być spełniony warunek $N = N_0 + N_1$. Estymowany parametr λ jest otrzymywany tylko z obserwacji dyskretnych (skwantowanych wartości dostępnych dla dekodera) bez uprzedniej znajomości współczynników przed kwantyzacją dostępnych dla kodera. Dlatego następuje próba odtworzenia GGD $p = 1/3$ zmiennej losowej ciągłej dostępnej dla kodera przed procesem kwantyzacji.

Zmodyfikowana rekonstrukcja z wykorzystaniem rozkładu GGD $p = 1/3$

Rekonstruowane współczynniki mogą być modyfikowane w celu poprawy jakości rekonstruowanego sygnału. Zgodnie ze sposobem wyznaczania środka ciężkości przedziału [82] równanie rekonstrukcji względem środka ciężkości przedziału dla rozkładu GGD $p = 1/3$ ma postać [H4]

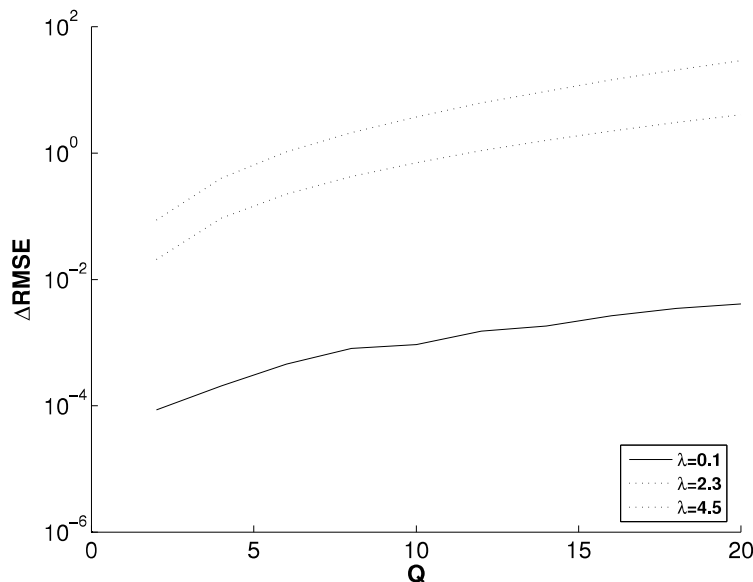
$$\hat{y}_i = \text{sgn}(y_i) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{L_i}{M_i}, \quad (56)$$

gdzie

$$\begin{aligned} L_i &= e^{-C_i} \cdot (C_i^5 + 5 \cdot C_i^4 + 20 \cdot C_i^3 + 60 \cdot C_i^2 + 120 \cdot C_i + 120) - \\ &\quad - e^{-B_i} \cdot (B_i^5 + 5 \cdot B_i^4 + 20 \cdot B_i^3 + 60 \cdot B_i^2 + 120 \cdot B_i + 120), \\ M_i &= e^{-C_i} \cdot (2 + 2C_i + C_i^2) - e^{-B_i} \cdot (2 + 2B_i + B_i^2). \end{aligned} \quad (57)$$

Wartość zrekonstruowana \hat{y}_i za pomocą środka ciężkości minimalizuje błąd średniokwadratowy (MSE) w przedziale $(Q \cdot i - 0.5 \cdot Q, Q \cdot i + 0.5 \cdot Q)$.

Kolejną zaletą ustalenia parametru potęgowego $p = 1/3$ dla GGD jest to, że równanie rekonstrukcji można przedstawić w postaci jawnej.



Rysunek 42: Obliczona różnica $\Delta RMSE$ (58) pomiędzy wartościami RMSE estymatorów (51) i (55) dla rozmiaru próby $N = 1000$ i zmiennej wartości współczynnika kwantyzacji Q [H4]

Symulacje działania zmodyfikowanej rekonstrukcji z wykorzystaniem rozkładu GGD $p = 1/3$

W pierwszej symulacji ocenione zostało działanie estymatorów największej wiarygodności (51) i (55). Sekwencja wejściowa generowana była za pomocą generatora GGD [67] z $p = 1/3$. Następnie sekwencja ta była kwantyzowana i dekwantyzowana, co odpowiada kompresji stratnej. Zadaniem estymatora było odtworzenie początkowego rozkładu przed kwantyzacją tylko na podstawie zdekwantyzowanych współczynników. Rozważany był rozmiar próby w zakresie $N \in \langle 2, 1000 \rangle$ i kroki kwantyzacji w przedziale $Q \in \langle 2, 20 \rangle$. Symulacje powtórzone $M = 1000$ razy. Do sprawdzenia działania estymatora wykorzystano względny błąd średniokwadratowy (RMSE (37)), gdzie $\hat{\lambda}$ to wartość wyestymowana przez model, a λ to rzeczywista wartość parametru lambda.

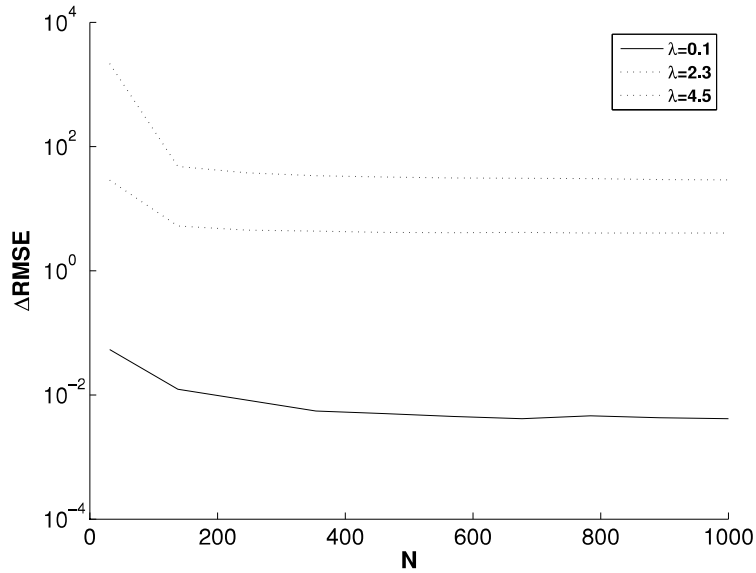
Rysunki 42 i 43 przedstawiają obliczoną różnicę pomiędzy wartościami RMSE estymatorów (51) i (55)

$$\Delta RMSE = RMSE_{cont} - RMSE_{discr}. \quad (58)$$

Oczekuje się, że estymator oparty na rozkładzie dyskretnym będzie działał lepiej niż estymator oparty na rozkładzie ciągłym. Dlatego wartości RMSE dla estymatora dyskretnego powinny przyjmować wartości mniejsze niż dla estymatora dla rozkładu ciągłego. W związku z tym różnica wartości $\Delta RMSE$ (58) powinna przyjmować wartości dodatnie, co znajduje potwierdzenie na rysunkach 42 i 43. Im jest wyższa wartość λ , tym estymator dla rozkładu dyskretnego (55) jest lepszy pod względem RMSE. Można również zauważyć, że wraz ze wzrostem wartości współczynnika kwantyzacji Q estymator dla rozkładu dyskretnego (55) jest coraz lepszy pod względem RMSE.

W kolejnej symulacji została porównana jakość rekonstrukcji współczynników DCT bez stosowania modyfikacji oraz z zastosowaniem modelu GGD $p = 1/3$. Został wygenerowany zestaw współczynników DCT za pomocą generatora GGD z parametrem kształtu $p = 1/3$. Została utworzona sekwencja wejściowa x_i , która stanowi sekwencję uzyskaną z odwrotnej transformaty DCT wylosowanych współczynników DCT. Następnie współczynniki DCT były kwantyzowane i dekwantyzowane, a zrekonstruowana sekwencja u_i była obliczona jako odwrotność DCT współczynników po dekwantyzacji. Dla takiej transformacji stratnej został obliczony błąd średniokwadratowy

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - x_i)^2, \quad (59)$$



Rysunek 43: Obliczona różnica $\Delta RMSE$ (58) pomiędzy wartościami RMSE estymatorów (51) i (55) dla współczynnika kwantyzacji $Q = 20$ i zmiennej wartości rozmiaru próby N [H4]

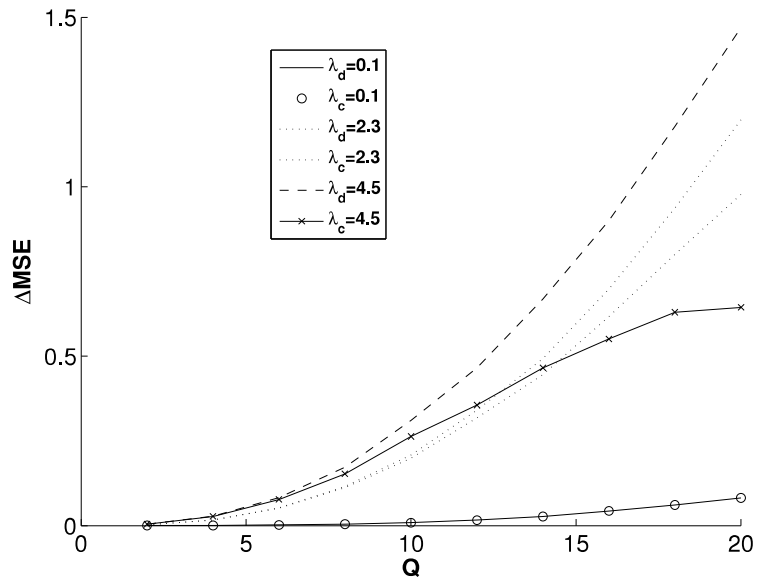
gdzie u_i to zrekonstruowana sekwencja, a x_i to sygnał wejściowy. Zrekonstruowane współczynniki DCT zostały zmodyfikowane za pomocą równania (56) dla parametru λ oszacowanego z równań (51) i (55). Następnie została wyznaczona zrekonstruowana sekwencja \hat{u}_i za pomocą odwrotnej transformaty DCT na podstawie zmodyfikowanych współczynników DCT. Dla tak zrekonstruowanej zmodyfikowanej sekwencji \hat{u}_i został wyznaczony błąd MSE.

Rysunki 44 i 45 przedstawiają obliczoną różnicę pomiędzy MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału u_i a zmodyfikowaną rekonstrukcją \hat{u}_i (56). Rozpatrzono dwa przypadki rekonstrukcji \hat{u}_i dla estymowanej wartości λ_c (51) i λ_d (55). Można zauważyć, że zmodyfikowana rekonstrukcja \hat{u}_i daje mniejsze MSE (dokładniej zrekonstruowana wartość) niż MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału u_i (dodatnie wartości ΔMSE na rysunkach 44 i 45). Większa dodatnia wartość ΔMSE oznacza lepsze dopasowanie zmodyfikowanej rekonstrukcji \hat{u}_i do oryginalnego sygnału x_i niż rekonstrukcja bez modyfikacji u_i . Dodatkowo należy zauważyć, że estymator dla rozkładu dyskretnego (55) daje mniejsze MSE niż estymator dla rozkładu ciągłego (51), co również oznacza lepsze dopasowanie do oryginalnego sygnału x_i .

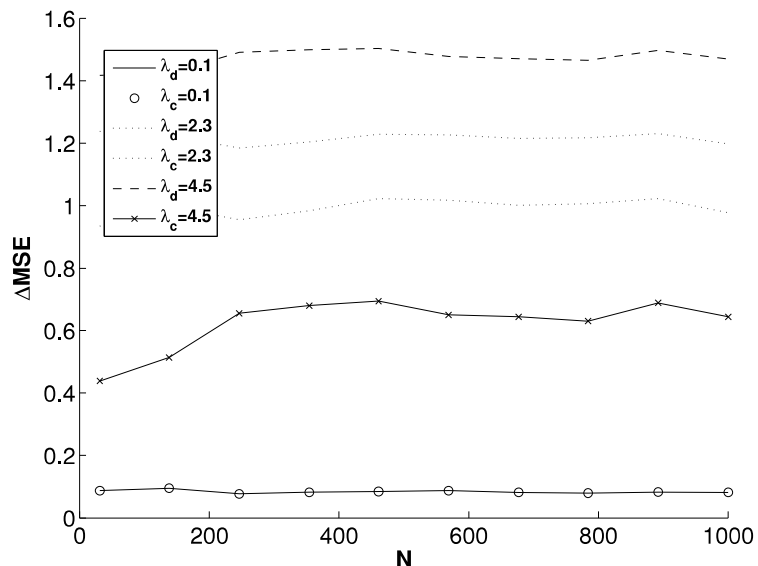
Podsumowując, dzięki *wprowadzeniu nowego przypadku szczególnego GGD dla $p = 1/3$ [H4] dla sygnałów o jeszcze bardziej impulsowym rozkładzie, możliwe stało się wprowadzenie równań w postaci jawnej oraz zmniejszyła się liczba wymaganych parametrów do estymacji w celu wyznaczenia rozkładu*. Wybór takiego modelu pozwala na uproszczenie obliczeń. Zostały wprowadzone:

- *funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej ciągłej (47),*
- *dystrybuanta dla zmiennej losowej ciągłej w postaci jawnej (49),*
- *estymator największej wiarygodności dla rozkładu ciągłego (51),*
- *rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej dyskretnej (53),*
- *estymator największej wiarygodności dla rozkładu dyskretnego (55),*
- *równanie rekonstrukcji skwantowanych współczynników względem środka ciężkości w postaci jawnej (56).*

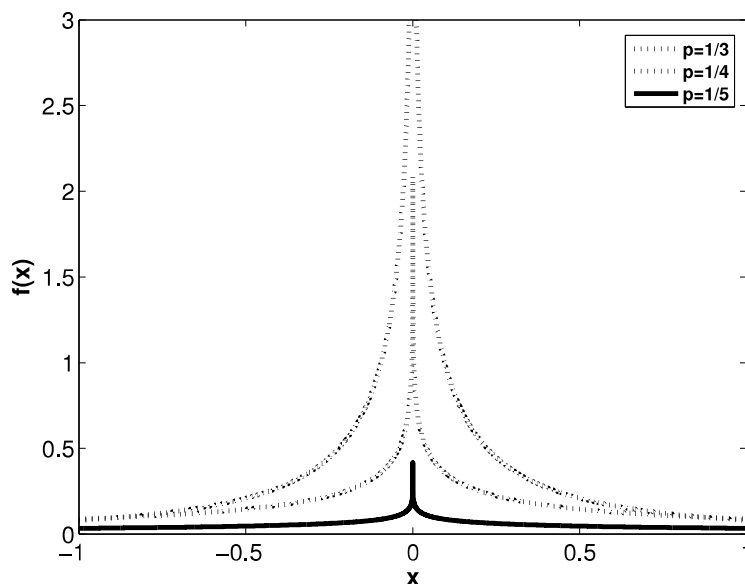
Praktyczne zastosowanie modelu GGD $p = 1/3$ w zmodyfikowanej rekonstrukcji skwantowanych współczynników DCT w stratnej kompresji wskazuje na możliwość poprawy błędu MSE wartości po dekompresji.



Rysunek 44: Obliczona różnica pomiędzy wartościami MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału po odwrotnej transformacji DCT u_i i zmodyfikowaną rekonstrukcją \hat{u}_i (λ_c (51) lub λ_d (55)) dla rozmiaru próby $N = 1000$ i zmiennej wartości współczynnika kwantyzacji Q [H4]



Rysunek 45: Obliczona różnica pomiędzy wartościami MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału po odwrotnej transformacji DCT u_i i zmodyfikowaną rekonstrukcją \hat{u}_i (λ_c (51) lub λ_d (55)) dla współczynnika kwantyzacji $Q = 20$ i zmiennej wartości rozmiaru próby N [H4]



Rysunek 46: Funkcja gęstości prawdopodobieństwa GGD zmiennej losowej ciągłej dla trzech wybranych parametrów kształtu $p = 1/3$, $p = 1/4$ i $p = 1/5$ [H6]

Powyżej przedstawione wyniki prac badawczych dla GGD $p = 1/3$ stanowią wkład w obszar statystycznego przetwarzania sygnałów i stanowią podstawę dla opracowanej w dalszych pracach badawczych klasy rozkładów o kształcie impulsowym [H6].

4.3.5 Uogólniony rozkład Gaussa z parametrem kształtu $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$

W dalszych pracach badawczych nad analizą sygnałów o rozkładzie GGD dla $p < 1$, po opracowaniu modelu $p = 1/3$ [H4], *została opracowana klasa modeli dla parametrów kształtu $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$ [H6] z ukierunkowaniem na możliwość modelowania sygnału o jeszcze bardziej impulsowym rozkładzie*. Należy podkreślić, że ograniczając się do szczególnych przypadków rozkładu GGD, można wyznaczyć równania w postaci jawnej i uprościć analizę sygnałów. *Przyjmując sygnał źródłowy o rozkładzie GGD z parametrem kształtu $p = 1/m$, można otrzymać równania rekonstrukcji względem środka ciężkości przedziału w postaci jawnej, a także metoda ML dyskretnego rozkładu GGD $p = 1/m$ wymaga oszacowania tylko jednego parametru*.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla uogólnionego rozkładu Gaussa z parametrem kształtu $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$ dla zmiennej losowej ciągłej

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej rozkładu GGD opisana jest wzorem (1). Podklasa funkcji gęstości GGD z wykładnikami $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$ zmiennej losowej ciągłej opisana jest wzorem [H6]

$$f(x) = \frac{\lambda}{2 \cdot m!} e^{-[\lambda \cdot |x|]^{1/m}}. \quad (60)$$

Rysunek 46 przedstawia funkcję gęstości prawdopodobieństwa GGD zmiennej losowej ciągłej dla trzech wybranych parametrów $m = 3$, $m = 4$ i $m = 5$.

Dystrybuantę uzyskuje się przez całkowanie równania (48), co daje dystrybuantę GGD $p = 1/m$ [H6]

$$F(x) = \begin{cases} A, & \text{for } x \leq 0 \\ 1 - A, & \text{for } x > 0 \end{cases}, \quad (61)$$

gdzie

$$\begin{cases} c = (\lambda \cdot |x|)^{1/m}, \\ \begin{cases} R(c, k) = c^k + k \cdot R(c, k - 1) & k > 1 \\ R(c, 1) = c + 1 & k = 1 \end{cases}, \\ A = \frac{\exp(-c)}{2 \cdot (m-1)!} \cdot R(c, m - 1). \end{cases} \quad (62)$$

Zaletą ustalenia parametru kształtu jest to, że dystrybuantę GGD $p = 1/m$ można przedstawić w postaci jawnej.

Estymator największej wiarygodności dla ciągłego GGD $p = 1/m$ można otrzymać, znajdując funkcję największej wiarygodności równania (60), obliczając jej logarytm i maksymalizując ją względem λ . Po odpowiednich przekształceniach estymator przyjmuje postać [H6]

$$\lambda = \left(\frac{1}{m \cdot N} \sum_{i=1}^N |x_i|^{1/m} \right)^{-m}, \quad (63)$$

gdzie N oznacza liczbę obserwacji.

Rozkład prawdopodobieństwa dla uogólnionego rozkładu Gaussa z parametrem kształtu $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$ dla zmiennej losowej dyskretnej

Rozkład prawdopodobieństwa dla uogólnionego rozkładu Gaussa z parametrem kształtu $p = 1/m$ dla zmiennej losowej dyskretnej otrzymuje się przez całkowanie funkcji $f(x)$ (równanie (60)) w przedziale kwantyzacji $(Q \cdot i - 0.5 \cdot Q, Q \cdot i + 0.5 \cdot Q)$

$$P_i = \frac{\lambda}{2 \cdot m!} \int_{(i-0.5) \cdot Q}^{(i+0.5) \cdot Q} e^{-[\lambda \cdot |x|]^{1/m}} dx, \quad (64)$$

gdzie Q wskazuje wartość kwantyzacji (współczynnik kwantyzacji), a i to skwantowana wartość (indeks przedziału kwantyzacji) gotowa do zakodowania i wysłania do dekodera. W wyniku całkowania otrzymuje się [H6]

$$\begin{cases} P_i &= \frac{1}{2 \cdot (m-1)!} \cdot [e^{-g_i} \cdot R(g_i, m-1) - e^{-h_i} \cdot R(h_i, m-1)] & i \neq 0 \\ P_0 &= 1 - \frac{\exp(-a)}{(m-1)!} \cdot R(a, m-1) & i = 0 \end{cases}, \quad (65)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a &= (0.5 \cdot \lambda \cdot Q)^{1/m}, \\ h_i &= (\lambda \cdot (|y_i| + 0.5 \cdot Q))^{1/m}, \\ g_i &= (\lambda \cdot (|y_i| - 0.5 \cdot Q))^{1/m}. \end{aligned} \quad (66)$$

W tym przypadku zrekonstruowane wartości wynoszą $y_i = i \cdot Q$.

Rysunek 47 przedstawia rozkład prawdopodobieństwa GGD zmiennej losowej dyskretnej P_i (równanie (65)) i funkcję gęstości prawdopodobieństwa GGD zmiennej losowej ciągłej $f(x)$ (równanie (60)) dla parametrów $p = 1/5$ oraz $\lambda = 1$.

W celu wyznaczenia estymatora największej wiarygodności dla rozkładu dyskretnego należy wyznaczyć funkcję największej wiarygodności równania (65), obliczyć jej logarytm i następnie ją maksymalizować względem λ . Po odpowiednich przekształceniach estymator ML dyskretnego GGD $p = 1/m$ przyjmuje postać [H6]

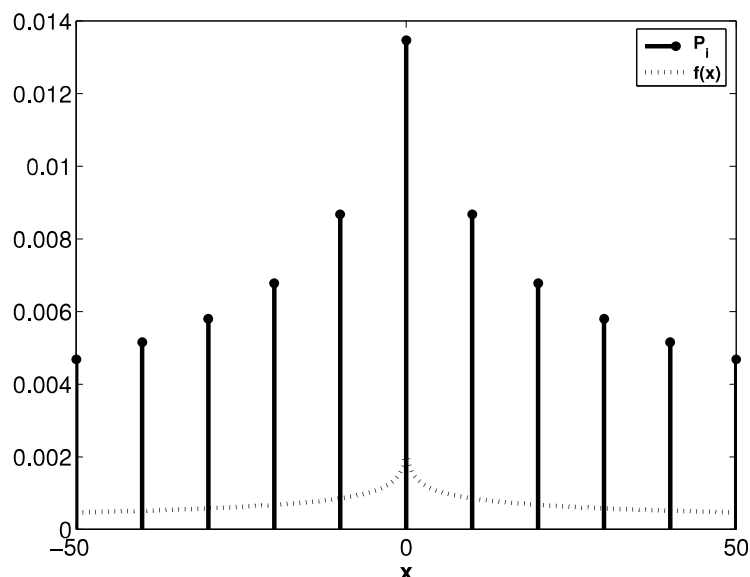
$$\frac{N_0 \cdot e^{-a} \cdot Q}{P_0} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{e^{-h_i} \cdot h_i^m - e^{-g_i} \cdot g_i^m}{P_i} = 0, \quad (67)$$

gdzie N_0 oznacza liczbę obserwacji równą zero, a N_1 oznacza liczbę obserwacji różną od zera i $N = N_0 + N_1$.

Zmodyfikowana rekonstrukcja z wykorzystaniem rozkładu GGD $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$

Zastosowanie równania rekonstrukcji względem środka ciężkości dla GGD $1/m$ daje [H6]

$$\hat{y}_i = \operatorname{sgn}(y_i) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{L_i}{P_i}, \quad (68)$$



Rysunek 47: Rozkład prawdopodobieństwa GGD zmiennej losowej dyskretnej P_i (równanie (65)) i funkcja gęstości prawdopodobieństwa GGD zmiennej losowej ciągłej $f(x)$ (równanie (60)) dla parametrów $p = 1/5$ oraz $\lambda = 1$ [H6]

gdzie

$$L_i = \frac{1}{2 \cdot (m-1)!} \cdot [e^{-g_i} \cdot R(g_i, 2 \cdot m - 1) - e^{-h_i} \cdot R(h_i, 2 \cdot m - 1)]. \quad (69)$$

Wartość zrekonstruowana \hat{y}_i za pomocą środka ciężkości minimalizuje błąd średniokwadratowy (MSE) w przedziale $(Q \cdot i - 0.5 \cdot Q, Q \cdot i + 0.5 \cdot Q)$.

Należy zauważyć, że równanie rekonstrukcji można przedstawić w postaci jawnej.

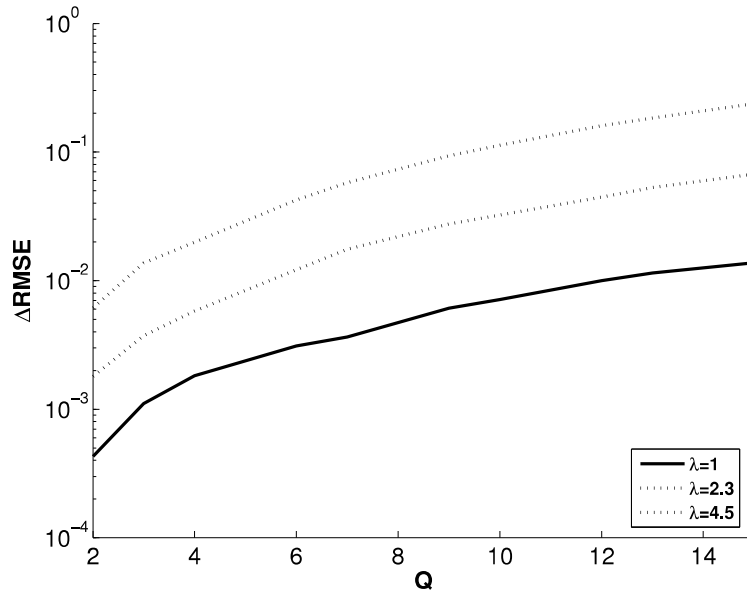
Symulacje działania zmodyfikowanej rekonstrukcji z wykorzystaniem rozkładu GGD $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$

Podobnie jak w poprzednich badaniach, porównane zostało działanie estymatorów największej wiarygodności dla rozkładu ciągłego (63) i dyskretnego (67) GGD $p = 1/m$. Sekwencja wejściowa generowana była za pomocą generatora GGD [67] z $p = 1/m$, gdzie $m = 4$. Następnie sekwencja ta była kwantyzowana i dekwantyzowana, co odpowiada kompresji stratnej. Zdekwantyzowane współczynniki używane były jako obserwacje wejściowe dla estymatorów. Symulacje powtórzono $M = 1000$ razy. Z równania (37) obliczono względny błąd średniokwadratowy (RMSE) dla wyestymowanych wartości $\hat{\lambda}$.

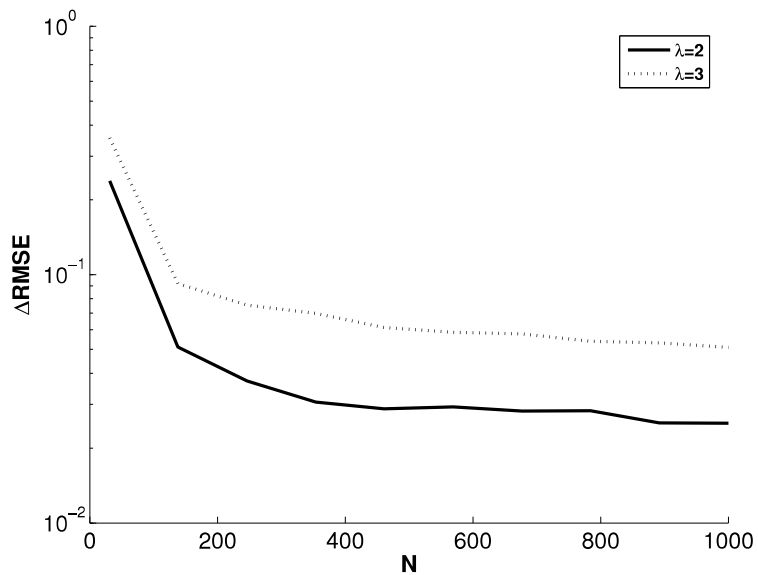
Na rysunku 48 przedstawiono obliczoną różnicę $\Delta RMSE$ pomiędzy wartościami RMSE estymatora dla rozkładu ciągłego (63) $RMSE_{cont}$ i rozkładu dyskretnego (67) $RMSE_{discr}$ dla rozmiaru próby $N = 1000$ i wybranych wartości λ przy zmianie współczynnika kwantyzacji Q . RMSE ma większą wartość dla estymatora rozkładu ciągłego niż RMSE rozkładu dyskretnego, więc różnica między dwoma $\Delta RMSE = RMSE_{cont} - RMSE_{discr}$ jest wartością nieujemną. Im większa różnica $\Delta RMSE$, tym lepszy estymator rozkładu dyskretnego. Można zauważyć, że estymator oparty na rozkładzie dyskretnym przewyższa estymator oparty na rozkładzie ciągłym, a różnica RMSE rośnie wraz ze wzrostem współczynnika kwantyzacji Q .

Rysunek 49 również potwierdza lepszą wydajność estymatora rozkładu dyskretnego dla różnych wartości długości próby N dla kryterium RMSE.

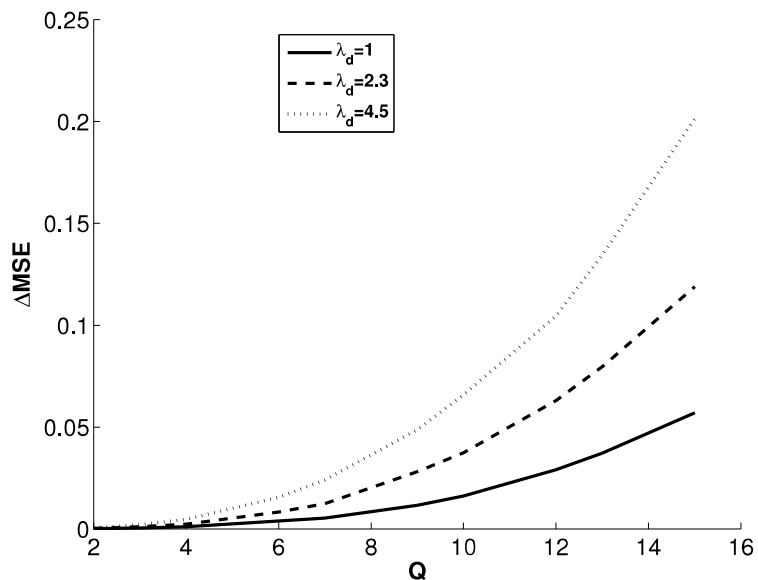
W następnej symulacji została porównana jakość rekonstrukcji współczynników DCT bez stosowania modyfikacji oraz z zastosowaniem modelu GGD $p = 1/m$. Został generowany zestaw współczynników DCT za pomocą generatora GGD z parametrem kształtu $p = 1/m$ dla $m = 4$. Następnie została obliczona odwrotna transformata DCT wylosowanych współczynników DCT tworząc sekwencję wejściową x_i . Następnie współczynniki DCT były kwantyzowane i dekwantyzowane. W kolejności została obliczona odwrotna transformata DCT współczynników DCT po dekwantyzacji. W ten sposób



Rysunek 48: Obliczona różnica $\Delta RMSE$ pomiędzy wartościami RMSE estymatora dla rozkładu ciągłego (63) i rozkładu dyskretnego (67) dla rozmiaru próby $N = 1000$ i wybranych wartości λ przy zmianie współczynnika kwantyzacji Q [H6]



Rysunek 49: Obliczona różnica $\Delta RMSE$ pomiędzy wartościami RMSE estymatorów (63) i (67) dla współczynnika kwantyzacji $Q = 10$ i zmiennej wartości rozmiaru próby N [H6]



Rysunek 50: Obliczona różnica pomiędzy wartościami MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału po odwrotnej transformacji DCT u_i i zmodyfikowaną rekonstrukcją \hat{u}_i (68) dla rozmiaru próby $N = 1000$ i zmiennej wartości współczynnika kwantyzacji Q [H6]

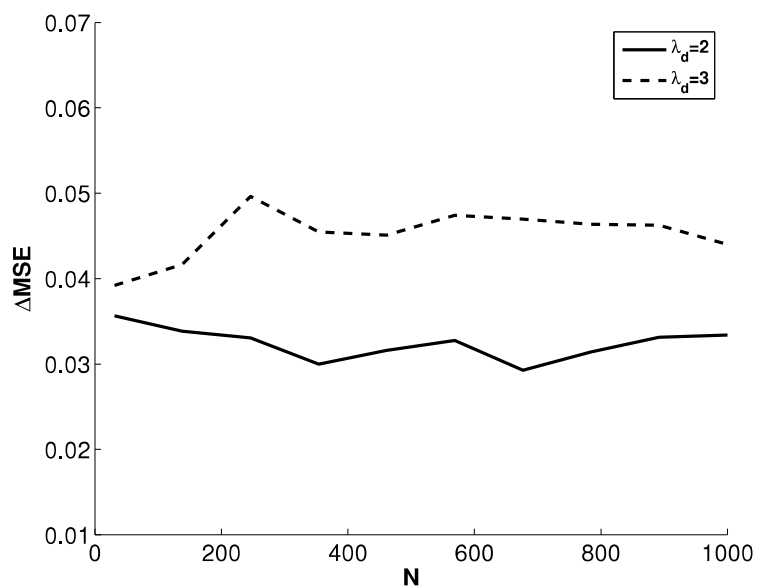
została utworzona zrekonstruowana sekwencja wyjściowa u_i . Dla zrekonstruowanej sekwencji wyjściowej u_i (lub zmodyfikowanej zrekonstruowanej sekwencji \hat{u}_i) i sygnału wejściowego x_i został obliczony błąd średniokwadratowy (MSE) (59). Zrekonstruowane współczynniki DCT modyfikowane są zgodnie z (68) przed wyznaczeniem odwrotnej transformaty DCT w celu wyznaczenia sekwencji wyjściowej \hat{u}_i .

Rysunki 50 i 51 przedstawiają obliczoną różnicę pomiędzy MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału u_i a zmodyfikowaną rekonstrukcją \hat{u}_i (68), gdzie parametr λ potrzebny we wzorze (68) wyznaczony jest za pomocą metody ML (67). Można zauważyć, że zmodyfikowana rekonstrukcja \hat{u}_i daje mniejsze MSE (dokładniej zrekonstruowana wartość) niż MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału u_i (dodatnie wartości ΔMSE na rysunkach 50 i 51). Większa dodatnia wartość ΔMSE oznacza lepsze dopasowanie zmodyfikowanej rekonstrukcji \hat{u}_i do oryginalnego sygnału x_i niż rekonstrukcja bez modyfikacji u_i . Na podstawie rysunku 50 można zauważyć, że wraz ze wzrostem współczynnika kwantyzacji Q błąd MSE dla standardowej rekonstrukcji zaczyna mocno wzrastać w stosunku do błędu MSE dla zmodyfikowanej rekonstrukcji współczynników DCT.

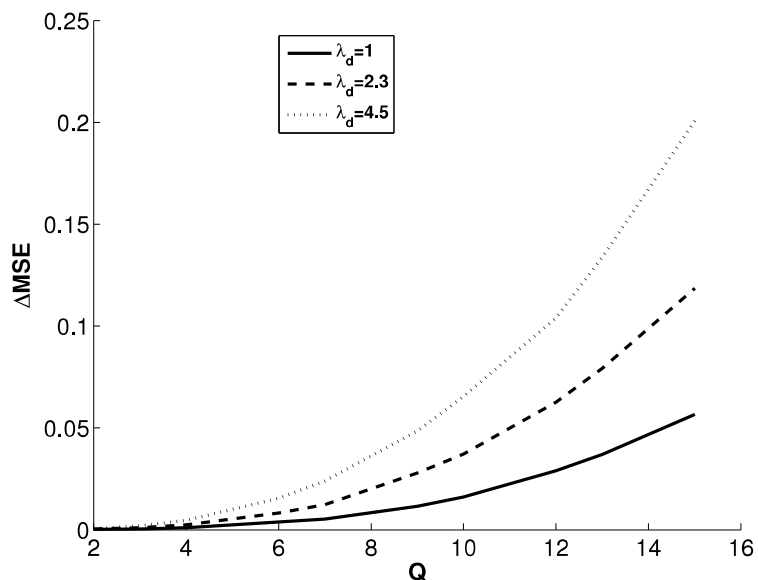
W ostatniej symulacji przeprowadzono podobne sprawdzenie jakości zmodyfikowanych zrekonstruowanych współczynników, tylko zamiast transformaty DCT, została zastosowana dyskretna transformata falkowa (ang. Discrete Wavelet Transform, DWT). Został wygenerowany zestaw szczegółowych współczynników dyskretnego transformaty falkowej za pomocą generatora GGD z parametrem kształtu $p = 1/m$ dla $m = 4$. Sekwencja wejściowa x_i została utworzona z obliczenia odwrotnej transformaty DWT wylosowanych współczynników DWT. Współczynniki aproksymacji DWT zostały ustawione na zero. Współczynniki DWT następnie były kwantyzowane i dekwantyzowane. Dla współczynników po dekwantyzacji została obliczona odwrotna transformata DWT i w ten sposób została wyznaczona zrekonstruowana sekwencja wyjściowa u_i . Zrekonstruowane współczynniki DWT modyfikowane są zgodnie z (68) przed wyznaczeniem odwrotnej transformaty DWT w celu wyznaczenia sekwencji wyjściowej \hat{u}_i .

Rysunki 52 i 53 przedstawiają obliczoną różnicę pomiędzy MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału u_i a zmodyfikowaną rekonstrukcją \hat{u}_i (68), gdzie parametr λ potrzebny we wzorze (68) wyznaczony jest za pomocą metody ML (67). Również w przypadku transformaty DWT zmodyfikowana rekonstrukcja \hat{u}_i daje mniejsze MSE (dokładniej zrekonstruowana wartość) niż MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału u_i (dodatnie wartości ΔMSE na rysunkach 52 i 53).

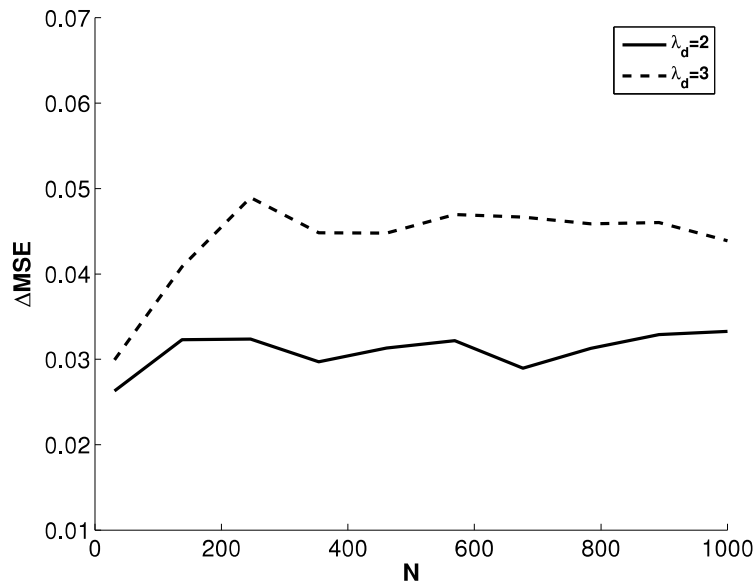
Podsumowując, *wprowadzając podklasę przypadków szczególnych $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$ dla rozkładu GGD [H6], otrzymuje się możliwość uproszczonego modelowania sygnałów o impulsowym rozkładzie.*



Rysunek 51: Obliczona różnica pomiędzy wartościami MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału po odwrotnej transformacie DCT u_i i zmodyfikowaną rekonstrukcją \hat{u}_i (68) dla współczynnika kwantyzacji $Q = 10$ i zmiennej wartości rozmiaru próby N [H6]



Rysunek 52: Obliczona różnica pomiędzy wartościami MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału po odwrotnej transformacie DWT u_i i zmodyfikowaną rekonstrukcją \hat{u}_i (68) dla rozmiaru próby $N = 1000$ i zmiennej wartości współczynnika kwantyzacji Q [H6]



Rysunek 53: Obliczona różnica pomiędzy wartościami MSE normalnie zrekonstruowanego sygnału po odwrotnej transformacji DWT u_i i zmodyfikowaną rekonstrukcją \hat{u}_i (68) dla współczynnika kwantyzacji $Q = 10$ i zmiennej wartości rozmiaru próby N [H6]

Można wtedy:

- *przedstawić dystrybuantę w postaci jawnej (61) eliminując całkowanie,*
- *wyznaczyć estymator największej wiarygodności rozkładu ciągłego w postaci jawnej, który wymaga estymacji tylko jednego parametru (63) i nie wymaga rozwiązywania numerycznie nieliniowego równania,*
- *wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej dyskretnej (65),*
- *wyznaczyć estymator największej wiarygodności rozkładu dyskretnego, który wymaga estymacji tylko jednego parametru (67).*

Zastosowanie modelu rozkładu GGD $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$ pozwala na wyznaczenie równania rekonstrukcji skwantowanych współczynników względem środka ciężkości w postaci jawnej (68) bez potrzeby całkowania. Zmodyfikowanie współczynników po dekompresji w kompresji stratnej, gdzie informacje są tracone przez kwantyzację, pozwala na zmniejszenie błędu MSE zrekonstruowanego sygnału w stosunku do standardowej rekonstrukcji.

4.3.6 Uogólniony rozkład Gaussa ze zmienna losową kwaternionu rozszerzonego

W przypadku sygnałów wielowymiarowych większość praktycznych przykładów opiera się na przetwarzaniu kanałów niezależnie bez uwzględniania korelacji między składowymi procesami wielokanałowego. W przypadku przetwarzania jednocześnie dwóch wymiarów sygnału (np. radaru, sonaru), bardziej wydajne algorytmy można uzyskać w porównaniu z przetwarzaniem każdego wymiaru osobno. W kanałach danych występują procesy o różnych mocach, m.in. sygnał zebrany przez trójosiowy geofon [83] lub trójwymiarowe pole wiatru mierzone przez trójosiowe anemometry [84], co prowadzi do niekołowego sygnału trójwymiarowego.

Zmienna zespolona z jest zdefiniowana jako dwie zmienne rzeczywiste z_R i z_I jako $z = z_R + j \cdot z_I$, gdzie $j = \sqrt{-1}$ i może być zapisana jako wektor dwuwymiarowy $\vec{z} = [z_R, z_I]^T$ w \mathbb{R}^2 . Część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej można znaleźć na podstawie liczby zespolonej z i jej wartości sprzężonej z^* , tj. $z_R = \frac{1}{2}(z + z^*)$ i $z_I = \frac{1}{2j}(z - z^*)$. Konieczne jest użycie zarówno z jak i z^* , aby móc opisać sygnał dwuwymiarowy w \mathbb{R}^2 , a to prowadzi do zastosowania statystyki zespolonej rozszerzonej (ang.

augmented complex statistics). Dlatego wygodnie jest pracować z wektorem rozszerzonym $\vec{z}^a = [z, z^*]^T$, gdzie

$$\vec{z}^a = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \cdot \vec{z}, \quad (70)$$

co zostało zdefiniowane w [85, 86].

Ta statystyka zespolonej rozszerzonej została wykorzystana do zaprojektowania algorytmu rozszerzonego filtru Kalmana o wartościach zespolonych rozszerzonych (ang. augmented complex valued extended Kalman filter, ACEKF) dla klasy nieliniowych filtrów adaptacyjnych w [87]. Inne algorytmy statystyki zespolonej rozszerzonej zostały szeroko omówione w [88].

Wielowymiarowy zespolony rozkład normalny (ang. complex normal distribution, CND) jest już dobrze znany [89]. Bardziej ogólny rozkład został zaproponowany w [85] jako wielowymiarowy uogólniony zespolony rozkład normalny (ang. generalized complex normal distribution, GCND).

Na przykład, ogólne zespolone wektory losowe Gaussa zostały zastosowane w modelach analizy składowych niezależnych (ang. Independent Components Analysis, ICA) [90]. Te wektory losowe zostały również przeanalizowane w innych pracach [86, 91, 92, 93].

Informacje o GGD z wartościami zespolonymi (CGGD) zostały usystematyzowane w [60]. Autorzy rozszerzyli wyniki dla zespolonego rozkładu normalnego zdefiniowanego w [85, 91] do GGD. Skonstruowano funkcję gęstości prawdopodobieństwa GGD o wartości zespolonej oraz zdefiniowano procedurę generowania liczb losowych z GGD o wartości zespolonej. Dodatkowo wprowadzono procedurę estymacji metodą największej wiarygodności dla parametrów kształtu i kowariancji w dziedzinie zespolonej i zastosowano ją do danych radarowych. Praca ta została rozszerzona o testowanie kołowości (ang. circularity) CGGD [94]. Mowakea i in. [95] wykorzystali zespolony wielowymiarowy GGD (ang. complex multivariate generalized Gaussian distribution, CMGGD) w analizie funkcjonalnego obrazowania metodą rezonansu magnetycznego (ang. functional magnetic resonance imaging, fMRI). CGGD należy do szerokiej rodziny zespolonych rozkładów eliptycznie symetrycznych (ang. complex elliptically symmetric, CES) [96, 97, 98]. Macierz informacji Fishera (ang. Fisher information matrix, FIM) do estymacji parametrów kształtu i skali oraz znormalizowana macierz kowariancji dla CGGD zostały wyprowadzone w [96]. CGGD zastosowano w wielu aplikacjach przetwarzania sygnałów, np. w obrazowaniu medycznym fMRI [99].

Kwaterniony można uważać za rozszerzenie liczb zespolonych [100] do przestrzeni czterowymiarowej (4-D). Kwaterniony modelowane są z wykorzystaniem algebry kwaternionów \mathbb{H} , co ułatwia modelowanie sygnałów trójwymiarowych i czterowymiarowych, gdzie wzajemna wymiana informacji pomiędzy kanałami jest wzięta pod uwagę. Obecnie można znaleźć wiele artykułów, które tematykę statystyki zespolonej rozszerzonej rozwijają do dziedziny kwaternionów.

Took i Mandic [101] ponownie przeanalizowali statystykę drugiego rzędu zmiennych losowych i procesów o wartościach kwaternionów w celu wykorzystania pełnych dostępnych informacji statystycznych drugiego rzędu oraz wprowadzili statystykę kwaternionów rozszerzonych (ang. augmented quaternion statistics) omawiając mechanizmy postępowania w celu analizy sygnałów drugiego rzędu zarówno kołowego (ang. circular), jak i niekołowego (ang. noncircular). W pracy [101] został także rozszerzony wielowymiarowy rozkład Gaussa na dane o wartościach kwaternionów dla procesów właściwych (ang. proper) i niewłaściwych (ang. improper). Sygnały kołowe drugiego rzędu są określane jako właściwe, podczas gdy sygnały niekołowe drugiego rzędu są określane jako niewłaściwe [101]. Poza tym w [101] zajęto się zastosowaniem statystyki kwaternionów rozszerzonych w filtrowaniu adaptacyjnym, dostarczając model kwaternionowy szerokoliniowy (ang. widely linear quaternion model) i rozwiązanie Wienera szerokoliniowe (ang. widely linear Wiener solution).

Istnienie takich filtrów bazujących na statystyce kwaternionów rozszerzonych stanowiło jedną z motywacji do zaprojektowania procedury generowania zmiennej losowej o wartościach kwaternionów rozszerzonych o określonym rozkładzie [H5], a w konsekwencji utworzenia nowych narzędzi testowania technik filtracji.

Zainteresowanie modelowaniem procesów za pomocą kwaternionów jest duże, co skutkuje coraz większą liczbą opublikowanych zastosowań. W [102] zaproponowano adaptacyjne kwaternionowe filtry Kalmana (KF) do estymacji położenia oraz losowych dryftów żyroskopowych z pomiarów wektorowych i porównano je z nieadaptacyjnym kwaternionowym filtrem Kalmana i addytywnym kwaternionowym

rozszerzonym filtrem Kalmana (ang. additive extended Kalman filter, AEKF).

W [84] wprowadzono inny algorytm filtrowania adaptacyjnego, a mianowicie kwaternionowy algorytm najmniejszej średniej kwadratów (ang. quaternion least mean squares, QLMS) dla procesów trójwymiarowych i czterowymiarowych, takich jak te obserwowane w modelowaniu atmosfery (wiatru, pola wektorowego), które charakteryzują się złożoną nieliniową dynamiką i sprzężeniem między wymiarami, które sprawiają, że ich przetwarzanie komponentowe przez inne algorytmy m.in., wiele jednowymiarowych LMS, dwuwymiarowe zespolone LMS (CLMS) lub wielokanałowe LMS (MLMS) jest niewystarczające.

Problem kierunku nadejścia (ang. direction of arrival, DOA) i estymacji parametrów polaryzacyjnych w przypadku wielu spolaryzowanych źródeł uderzających w macierzę wektorowo-sensorową rozwiązano za pomocą algorytmu quaternion-MUSIC (Q-MUSIC) z macierzą widmową kwaternionów (ang. quaternion spectral matrix, QSM) w [103].

Do estymacji widma zdefiniowano również dwukwaternionową transformatę Fouriera (ang. biquaternion Fourier transform, BiQFT) [104]. W znakowaniu wodnym użyto również kwaternionową transformatę Fouriera (ang. quaternion Fourier transform, QFT) [105].

W literaturze pojawia się również zainteresowanie obliczeniami rozkładu według wartości własnych (EVD) i rozkładu według wartości osobliwych (SVD) [106] macierzy kwaternionów w mechanice kwantowej [107] i przetwarzaniu obrazów kolorowych [108]. Ze względu na nieprzemienność mnożenia kwaternionów istnieją dwa typy (prawe [109, 110] i lewe [111]) wartości własnych kwaternionów.

Inne zastosowania kwaternionów można znaleźć w rozwiązywaniu problemów separacji źródeł [112], w przetwarzaniu obrazów kolorowych [113], w modelowaniu molekularnym [114], w robotyce [115], w grafice komputerowej [116], itd.

Przykłady wykorzystania statystyki drugiego rzędu kwaternionów rozszerzonych:

- problem estymacji nieliniowego minimalnego błędu kwadratowego (MMSE) [117],
- analiza składowych niezależnych (ICA) [118],
- nieliniowe filtrowanie adaptacyjne przez sieci stanu echa o wartościach kwaternionów (ang. quaternion-valued echo state networks, QESNs) [119],
- przetwarzanie szerokoliniowe kwaternionów (ang. quaternion widely linear, QWL) [101, 120, 121, 122],
- szerokoliniowy filtr Kalmana o wartościach kwaternionów (ang. widely linear quaternion-valued Kalman filter, WL-QKF) i szerokoliniowy filtr Kalmana o rozszerzonym kwaternionie (ang. widely linear quaternion-extended Kalman filter, WL-QEKF) [123],
- adaptacyjny szerokoliniowy kwaternionowy algorytm najmniejszych średnich kwadratów (ang. widely linear quaternion least mean square, WL-QLMS) do modelowania i prognozowania trójwymiarowego pola wiatru [124],
- algorytm szerokoliniowej kwaternionowej estymacji adaptacyjnej wielu modeli (ang. widely linear quaternion multiple-model adaptive estimation, WL-QMMAE) oparty na szerokoliniowym kwaternionowym filtrze Kalmana i wnioskowaniu bayesowskim [125],
- modele ekstremalnego uczenia maszynowego kwaternionu rozszerzonego (ang. augmented quaternion extreme learning machine, QELM) do przetwarzania sygnału kwaternionowego [126],
- modele ekstremalnego uczenia maszynowego sekwencyjnego kwaternionu rozszerzonego online (ang. augmented online sequential quaternion extreme learning machine, OS-QELM) do uczenia w czasie rzeczywistym jednokierunkowych sieci neuronowych [127].

Wariacyjny autoenkoder (ang. variational autoencoder, QVAE) w domenie kwaternionów \mathbb{H} wykorzystujący rozszerzoną statystykę drugiego rzędu \mathbb{H} -właściwych sygnałów został przeanalizowany w [128]. Kwaterniony rozszerzone zastosowano także dla oszacowania pozostałego okresu użytkowania (ang. remaining useful life, RUL) łożysk tocznych [129] i do prognozowania degradacji łożysk tocznych [130].

Ogólny schemat dla przestrzeni Hilberta z jądrem reprodukcującym (ang. reproducing kernel Hilbert space, RKHS) do analizy statystycznej losowych wektorów kwaternionów rozszerzonych został przedstawiony w [131].

Uogólniony rozkład Gaussa kwaternionów rozważano w [83], ponieważ stwierdzono, że rzeczywiste sygnały sejsmiczne nie mogą być w pełni opisane przy użyciu istniejących modeli Gaussa [132]. Rozkład ten został wyprowadzony jako rozszerzenie uogólnionego rozkładu Gaussa zespolonego [60, 94]. W pracy [83] zbadano sparametryzowaną przez QGGD (ang. quaternion generalized Gaussian distribution) zmienność wektora-kwaternionu podczas obecności i nieobecności spolaryzowanego źródła, tj. ludzkich kroków. Autorzy modelowali szczytowość wielowymiarowego rozkładu sygnału za pomocą parametru kształtu QGGD, natomiast w celu ilościowego określenia korelacji międzykanałowej geofonu trójosiowego wykorzystano rozszerzoną macierz kowariancji (ang. augmented covariance matrix) QGGD. Tradycyjne metody wykrywania ludzkich kroków opierają się jednak na wykorzystaniu jednoosiowych geofonów, które wykorzystują statystykę wyższego rzędu (np. kurtozę) do ilościowego określenia niegaussowości lub kadencji do kwantyfikacji okresowości ciągu kroków [133]. QGGD umożliwia modelowanie szerokiej gamy procesów o wartościach kwaternionowych i może być rozszerzony na inne zastosowania, takie jak badania oceaniczne przy użyciu hydrofonów [134].

Jak wykazano, GGD jest powszechnie stosowane i w literaturze pojawiają się różne warianty GGD. Także zostało pokazane, że kwaterniony rozszerzone są wykorzystywane w wielu dziedzinach badań. Dlatego istnieje potrzeba modelowania procesów z wykorzystaniem nowych modeli.

Nie wszystkie sygnały rzeczywiste można opisać za pomocą istniejących modeli Gaussa. Podobnie jak dla procesów o wartościach zespolonych o zadanych rozkładach prawdopodobieństwa istnieje potrzeba utworzenia modeli o wartościach kwaternionowych. Modele takie znajdują zastosowanie jako źródło sygnału do testowania nieliniowych modeli filtrów adaptacyjnych, do tworzenia znaków wodnych, do syntezy obrazów kolorowych, do testowania algorytmów wykrywania kroków, itp. W świetle tych ustaleń istnieje potrzeba posiadania generatora QGGD do testowania i porównywania badanych modeli, dlatego *została wprowadzona alternatywna postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej przyjmującej wartości kwaternionu rozszerzonego oraz dla tego rozkładu została zdefiniowana procedura generowania zmiennych losowych o wartościach kwaternionów rozszerzonych* [H5]. Symulacje wymagają odpowiednich konfigurowalnych generatorów do oceny wydajności estymatorów, a QGGD może być elastycznym i odpowiednim narzędziem do modelowania i symulacji danych. Statystyczne zróżnicowanie sygnału wektorowo-kwaternionowego przy użyciu parametru kształtu i rozszerzonej macierzy kowariancji kwaternionów może być modelowane za pomocą QGGD i wykorzystywane, na przykład, do testowania algorytmu do wykrywania kroków.

Dodatkowo, *została podana alternatywna funkcja gęstości prawdopodobieństwa 3D uogólnionego rozkładu Gaussa (3D GGD) sparametryzowana przez parametr kształtu p i macierz kowariancji C poprzez zmianę jej zapisu i zapewniając normalizację momentu drugiego rzędu* [H5].

Jednak operowanie w domenie kwaternionów nie jest tak wygodne z punktu widzenia przekształceń, a relacja między elementami wektora czterowymiarowego w \mathbb{R}^4 a elementami zmiennej o wartości kwaternionów w \mathbb{H} nie jest łatwa do ustalenia. Aby rozwiązać ten problem wykorzystuje się trzy prostopadłe inwolucje kwaternionów oznaczone jako q^l, q^j, q^k wraz z odpowiadającymi im wartościami sprzężonymi q^{l*}, q^{j*}, q^{k*} [135]. Analogicznie do dziedziny zespolonej, cztery składowe kwaternionu q można znaleźć z:

$$\begin{aligned} q_a &= \frac{1}{2}(q + q^*) & q_b &= \frac{1}{2l}(q - q^{l*}), \\ q_c &= \frac{1}{2j}(q - q^{j*}) & q_d &= \frac{1}{2k}(q - q^{k*}), \end{aligned} \quad (71)$$

gdzie q^* jest kwaternionem sprzężonym. Konieczne jest użycie kombinacji $\{q, q^l, q^j, q^k\}$ i ich sprzężeń, aby móc opisać sygnał czterowymiarowy w \mathbb{R}^4 i znajduje to zastosowanie jako punkt wyjścia do statystyk kwaternionów rozszerzonych, gdzie bazowy kwaternion rozszerzony $\bar{q}^a \in \mathbb{H}^4$. Pozwala to

na ustalenie relacji między czteroskładową zmienną o wartościach rzeczywistych (q_a, q_b, q_c, q_d) a jej kwaternionowym odpowiednikiem q .

Zmienna jako kwaternion pełny $q = q_a + \iota q_b + j q_c + \kappa q_d$ zawiera część rzeczywistą q_a i część wektorową q_p , zwaną także kwaternionem czystym (ang. pure quaternion) $q_p = \iota q_b + j q_c + \kappa q_d$. Trzy osie ι, j, κ to ortogonalne wektory jednostkowe, a ich relacje są

$$\begin{aligned} \iota j &= \kappa & j \kappa &= \iota & \kappa \iota &= j, \\ \iota j \kappa &= \iota^2 = j^2 = \kappa^2 = -1. \end{aligned} \quad (72)$$

Kwaternion pełny można zapisać jako wektor czterowymiarowy $\vec{q} = [q_a, q_b, q_c, q_d]^T$, a kwaternion czysty jako wektor trójwymiarowy $\vec{q}_p = [q_b, q_c, q_d]^T$.

Trzy prostopadłe inwolucje kwaternionów zostały podane w pracy [101]

$$\begin{aligned} q^\iota &= -\iota q \iota = q_a + \iota q_b - j q_c - \kappa q_d, \\ q^j &= -j q j = q_a - \iota q_b + j q_c - \kappa q_d, \\ q^\kappa &= -\kappa q \kappa = q_a - \iota q_b - j q_c + \kappa q_d. \end{aligned} \quad (73)$$

Następnie można utworzyć kwaternion rozszerzony [101, 136] jako $\vec{q}^{\vec{a}} = [q, q^\iota, q^j, q^\kappa]^T$.

Mapowanie z wektora czterowymiarowego o wartościach rzeczywistych \vec{q} do kwaternionu rozszerzonego $\vec{q}^{\vec{a}}$ można opisać zależnościami [101]

$$\begin{bmatrix} q \\ q^\iota \\ q^j \\ q^\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \iota & j & \kappa \\ 1 & \iota & -j & -\kappa \\ 1 & -\iota & j & -\kappa \\ 1 & -\iota & -j & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \\ q_d \end{bmatrix}, \quad (74)$$

co można zapisać w skrótowej formie

$$\vec{q}^{\vec{a}} = A \cdot \vec{q}. \quad (75)$$

A jest macierzą odwracalną i jest równa [101]

$$A^{-1} = \frac{1}{4} A^H, \quad (76)$$

gdzie $(\cdot)^H$ jest operatorem transpozycji sprzężonej kwaternionu (ang. quaternion conjugate transpose operator).

Biorąc pod uwagę równanie (76), transpozycja sprzężona kwaternionu macierzy odwrotnej A^{-1} wynosi

$$A^{-H} = (A^{-1})^H = \left(\frac{1}{4} A^H\right)^H = \frac{1}{4} A. \quad (77)$$

Wyznacznik A można obliczyć jako iloczyn wartości osobliwych [101] macierzy A lub po prostu przez dekompozycję LU macierzy A i iloczyn jego wartości diagonalnych

$$|A| = 16. \quad (78)$$

Z (75) i (76) odwrotne odwzorowanie z kwaternionu rozszerzonego na wektor czterowymiarowy o wartościach rzeczywistych wynosi [101]

$$\vec{q} = \frac{1}{4} A^H \cdot \vec{q}^{\vec{a}}. \quad (79)$$

Alternatywna postać znormalizowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa 3D GGD

Znormalizowany rozkład 3D GGD z jednostkową wariancją został podany w [83] (równanie (16)) w postaci:

$$p(\mathbf{v}) = \beta(c) \cdot e^{-\xi(c)[\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}]^c},$$

gdzie c oznacza parametr kształtu, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$ jest wektorem trójwymiarowym oraz $\beta(c) = c \frac{\Gamma(5/c)}{2\pi^2 \Gamma(3/2c)^2}$ i $\xi(c) = \frac{\Gamma(5/c)}{2\Gamma(3/2c)}$ (równanie (15) w [83]).

Rozkład QGGD podany w pracy [83] opiera się na tej funkcji gęstości prawdopodobieństwa i podane jest, że równanie (16) w pracy [83] jest znormalizowane i posiada jednostkową wariancję. W [H5] została wyznaczona całka momentu drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} E\{x_1^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \cdot p(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \rho^2 \sin(\phi)^2 \cos(\chi)^2 \\ &\quad \cdot \beta(c) \cdot e^{-\xi(c) \cdot \rho^{2c}} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\chi d\phi \\ &= \frac{2\pi \cdot \beta(c) \cdot \Gamma(5/2c)}{3 \cdot c \cdot \xi(c)^{5/2c}} \\ &= \frac{2^{5/2c}}{3\pi} \cdot \Gamma(5/c)^{1-5/2c} \cdot \Gamma(3/2c)^{5/2c-2} \cdot \Gamma(5/2c), \end{aligned} \quad (80)$$

co wskazuje, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa nie jest znormalizowana. W związku z tym należało wyznaczyć alternatywną postać znormalizowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa 3D GGD i dopiero korzystając z tej funkcji zbudować alternatywną postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa QGGD.

Konstrukcja funkcji gęstości prawdopodobieństwa bazuje na wspólnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa (ang. joint probability density function) trzech zmiennych losowych. Konstruuje się zmienną losową Y składającą się z trzech zmiennych losowych Y_0, Y_1, Y_2 i może być wyrażona we współrzędnych sferycznych:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cdot \sin(\Theta) \cdot \cos(\Phi) \\ R \cdot \sin(\Theta) \cdot \sin(\Phi) \\ R \cdot \cos(\Theta) \end{bmatrix}, \quad (81)$$

gdzie $R \in (0, \infty)$ jest zmienną losową odpowiadającą promieniowi, Θ oznacza zmienną losową o rozkładzie jednostajnym

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{\pi}, \quad \Theta \in \langle 0, \pi \rangle \quad (82)$$

i odpowiada nachyleniu oraz Φ oznacza zmienną losową o rozkładzie jednostajnym

$$f_{\Phi}(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \Phi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (83)$$

i odpowiada azymutowi.

W [H5] (równanie (14)) została podana alternatywną postać znormalizowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa 3D GGD:

$$f_Y(\vec{y}) = \frac{p}{\sin(\theta) \cdot \pi^2 \cdot s^{\frac{3}{2p}} \Gamma\left(\frac{3}{2p}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{s} \cdot (\vec{y}^T \cdot \vec{y})^p}, \quad (84)$$

gdzie p oznacza parametr kształtu, $\vec{y} = [y_0, y_1, y_2]^T$ jest wektorem trójwymiarowym oraz współczynnik normalizujący wynosi:

$$s = \left(\frac{4 \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2p}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2p}\right)} \right)^p. \quad (85)$$

We wzorze (84) występuje niekorzystny współczynnik $\sin(\theta)$, który można pominąć przyjmując założenie $\sin(\theta) \approx 1$ jak w pracy [83].

Alternatywna postać znormalizowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa 3D GGD z generowaniem punktów równomiernie rozmieszczonymi na sferze

Wzór (84) można uzdatnić poprzez generowanie punktów równomiernie rozmieszczonych na sferze. W celu wybrania dowolnego punktu na powierzchni kuli nie należy wybierać współrzędnych sferycznych Θ i Φ z rozkładów jednostajnych (82) i (83), ponieważ element powierzchni $dA = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$ jest funkcją θ , a co za tym idzie punkty zebrane w ten sposób będą skoncentrowane w pobliżu biegunów [137] i nieliczne wokół równika. W związku z tym, aby uzyskać równomierny rozkład punktów na sferze, można zastosować następującą zmienną losową:

$$\Theta = \arccos(1 - 2 \cdot U), \quad (86)$$

gdzie U jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym

$$f_U(u) = 1, U \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (87)$$

Dlatego w [H5] (równanie (23)) została podana jeszcze jedna alternatywna postać znormalizowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa 3D GGD:

$$f_Y(\vec{y}) = \frac{p}{2\pi \cdot s^{2p} \Gamma\left(\frac{3}{2p}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{s} \cdot (\vec{y}^T \cdot \vec{y})^p}, \quad (88)$$

gdzie p oznacza parametr kształtu, $\vec{y} = [y_0, y_1, y_2]^T$ jest wektorem trójwymiarowym oraz współczynnik normalizujący wynosi:

$$s = \left(\frac{3 \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2p}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2p}\right)} \right)^p. \quad (89)$$

Należy zauważyć, że współczynnik $\sin(\theta)$ został wyeliminowany z funkcji gęstości prawdopodobieństwa (88).

Alternatywna postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej przyjmującej wartości kwaternionu rozszerzonego

Wzór (88) jest punktem wyjściowym do utworzenia alternatywnej postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa QGGD.

Jeżeli $\vec{Q} = [Q_a, Q_b, Q_c, Q_d]^T$ jest zmienną losową o wartościach pełnego kwaternionu, wtedy po wyznaczeniu wartości oczekiwanej $E\{\cdot\}$ iloczynu $\vec{Q} \cdot \vec{Q}^T$, otrzymuje się czterowymiarową macierz kowariancji o wartościach rzeczywistych C

$$C = E\{\vec{Q} \cdot \vec{Q}^T\} = E\{\vec{Q} \cdot \vec{Q}^H\} = \begin{bmatrix} \sigma_{Q_a}^2 & \sigma_{Q_a Q_b} & \sigma_{Q_a Q_c} & \sigma_{Q_a Q_d} \\ \sigma_{Q_b Q_a} & \sigma_{Q_b}^2 & \sigma_{Q_b Q_c} & \sigma_{Q_b Q_d} \\ \sigma_{Q_c Q_a} & \sigma_{Q_c Q_b} & \sigma_{Q_c}^2 & \sigma_{Q_c Q_d} \\ \sigma_{Q_d Q_a} & \sigma_{Q_d Q_b} & \sigma_{Q_d Q_c} & \sigma_{Q_d}^2 \end{bmatrix}, \quad (90)$$

gdzie σ_X^2 jest wariancją składowej wektora, a σ_{XY} jest kowariancją pomiędzy składowymi skalarnymi wektora.

Dla zmiennej losowej $\vec{Q} = [0, Q_b, Q_c, Q_d]^T$ reprezentującej zmienną losową kwaternionu czystego, czterowymiarowa macierz kowariancji o wartościach rzeczywistych C (90) przyjmuje wartości

$$C = E\{\vec{Q} \cdot \vec{Q}^T\} = E\{\vec{Q} \cdot \vec{Q}^H\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{Q_b}^2 & \sigma_{Q_b Q_c} & \sigma_{Q_b Q_d} \\ 0 & \sigma_{Q_c Q_b} & \sigma_{Q_c}^2 & \sigma_{Q_c Q_d} \\ 0 & \sigma_{Q_d Q_b} & \sigma_{Q_d Q_c} & \sigma_{Q_d}^2 \end{bmatrix}. \quad (91)$$

Zakładając podobnie, że $\vec{Q}^{\hat{a}} = [Q, Q^i, Q^j, Q^k]^T$ jest zmienną losową kwaternionu rozszerzonego, to po wyznaczeniu wartości oczekiwanej iloczynu $\vec{Q}^{\hat{a}} \cdot \vec{Q}^{\hat{a}H}$, otrzymuje się macierz kowariancji kwaternionów rozszerzonych C^a [101]

$$\begin{aligned} C^a &= E\{\vec{Q}^{\hat{a}} \cdot \vec{Q}^{\hat{a}H}\} = E\{A \cdot \vec{Q} \cdot \vec{Q}^H \cdot A^H\} \\ &= A \cdot E\{\vec{Q} \cdot \vec{Q}^H\} \cdot A^H = A \cdot C \cdot A^H. \end{aligned} \quad (92)$$

Z (92) widać, że macierz C^a zależy od macierzy C .

Na podstawie (92) macierz kowariancji C z wartościami rzeczywistymi może być wyrażona za pomocą macierzy kowariancji C^a z wartościami kwaternionów [101]

$$C = A^{-1} \cdot C^a \cdot A^{-H}. \quad (93)$$

Podstawiając (76) i (77) do (93) otrzymuje się zależność [101]

$$C = \frac{1}{16} A^H \cdot C^a \cdot A. \quad (94)$$

Macierz odwrotną C^{-1} można uzyskać na podstawie (93), tj.

$$C^{-1} = A^H \cdot (C^a)^{-1} \cdot A. \quad (95)$$

Natomiast wyznacznik C można wyrazić jako funkcję C^a z (76), (78) i (94) jako [101]

$$|C| = \left| \frac{1}{16} A^H \right| \cdot |C^a| \cdot |A| = \left(\frac{1}{16} \right)^2 \cdot |C^a|. \quad (96)$$

Na podstawie (95), odwrotność macierzy kowariancji C^a kwaternionów rozszerzonych wyrażona w postaci macierzy kowariancji C o wartościach rzeczywistych wynosi

$$(C^a)^{-1} = A^{-H} \cdot C^{-1} \cdot A^{-1} \quad (97)$$

i biorąc pod uwagę (76) i (77), (97) można zapisać jako

$$(C^a)^{-1} = \frac{1}{16} A \cdot C^{-1} \cdot A^H. \quad (98)$$

Aby wprowadzić do wzoru (88) macierz kowariancji C z wartościami rzeczywistymi dla zmiennej losowej kwaternionu czystego Q , należy zastosować transformację liniową M do zmiennej losowej Y

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_b \\ Q_c \\ Q_d \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Przekształcenie liniowe M można znaleźć za pomocą obliczenia pierwiastka kwadratowego macierzy C

$$M = \sqrt{C}. \quad (100)$$

Pierwiastek kwadratowy macierzy można obliczyć za pomocą rozkładu według wartości własnych C , tak że

$$C = V \Lambda V^{-1}, \quad (101)$$

gdzie Λ jest macierzą diagonalną wartości własnych o wartościach rzeczywistych, a V jest macierzą wektorów własnych. Wtedy pierwiastek kwadratowy macierzy znajduje się z

$$\sqrt{C} = V \sqrt{\Lambda} V^{-1} = M. \quad (102)$$

Związek między wyznacznikami macierzy C i M jest równy $|C| = |M^2| = |M|^2$, więc $\sqrt{|C|} = |M|$.

Poprzez przekształcenie zmiennych przez M (99) w funkcji gęstości prawdopodobieństwa (88), uzyskano rozkład 3D GGD

$$\begin{aligned}
f_Q(\vec{q}) &= \frac{1}{|M|} f_Y(M^{-1}\vec{q}) \\
&= \frac{p}{2\pi \cdot |M| \cdot s^{\frac{3}{2p}} \Gamma\left(\frac{3}{2p}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{s} \cdot (\vec{q}^T \cdot M^{-2} \cdot \vec{q})^p} \\
&= \frac{p}{2\pi \cdot \sqrt{|C|} \cdot s^{\frac{3}{2p}} \Gamma\left(\frac{3}{2p}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{s} \cdot (\vec{q}^T \cdot C^{-1} \cdot \vec{q})^p}
\end{aligned} \tag{103}$$

sparametryzowany przez parametr kształtu p i macierz kowariancji C .

Funkcja kwadratowa $\vec{q}^T \cdot C^{-1} \cdot \vec{q}$ może być wyrażona jako funkcja zmiennej o wartości kwaternionu rozszerzonego $\vec{q}^{\vec{a}}$ korzystając z (75) i (95) jako

$$\vec{q}^T \cdot C^{-1} \cdot \vec{q} = \vec{q}^H \cdot C^{-1} \cdot \vec{q} = \vec{q}^H \cdot A^H \cdot (C^a)^{-1} \cdot A \cdot \vec{q} = \vec{q}^{\vec{a}H} \cdot (C^a)^{-1} \cdot \vec{q}^{\vec{a}}. \tag{104}$$

Ostateczne równanie dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej o wartościach kwaternionu rozszerzonego (QGGD) otrzymuje się z (103), (96) i (104) jako [H5]

$$f_Q(\vec{q}^{\vec{a}}) = \frac{8p}{\pi \cdot \sqrt{|C^a|} \cdot s^{\frac{3}{2p}} \Gamma\left(\frac{3}{2p}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{s} \cdot (\vec{q}^{\vec{a}H} \cdot (C^a)^{-1} \cdot \vec{q}^{\vec{a}})^p} \tag{105}$$

sparametryzowane przez parametr kształtu p i macierz kowariancji C^a kwaternionów rozszerzonych.

Procedura generowania zmiennej losowej o wartościach kwaternionu rozszerzonego o rozkładzie QGGD

Dla tak opracowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa QGGD (105) została podana procedura generowania zmiennej losowej kwaternionu rozszerzonego o tym rozkładzie.

Mając zadany parametr kształtu p i macierz kowariancji C^a kwaternionów rozszerzonych, procedurę generowania próbek rozkładu QGGD można opisać w następujących krokach [H5]:

1. Należy obliczyć wartość $g = 2 \cdot p$.
2. Należy wygenerować zmienną losową o rozkładzie jednostajnym U (87).
3. Należy wygenerować zmienną losową o rozkładzie jednostajnym Φ (83).
4. Należy wygenerować zmienną losową X z rozkładem gamma (106) dla $\alpha = \frac{3}{2 \cdot p}$ i s równego (89).

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu gamma w parametryzacji skali i kształtu wynosi

$$f(x; \alpha, s) = \frac{x^{\alpha-1}}{s^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\frac{x}{s}} \tag{106}$$

dla $x > 0$ i $\alpha, s > 0$, gdzie α jest parametrem kształtu i s jest parametrem skali.

5. Należy wyznaczyć zmienną losową R .

Amplituda R jest oparta na zmiennej losowej z rozkładu gamma. Zmienna losowa z rozkładu gamma podniesiona jest do potęgi $(1/g)$

$$R = X^{\frac{1}{g}}. \tag{107}$$

6. Należy wyznaczyć zmienną losową Θ z (86).
7. Należy wyznaczyć zmienną losową $Y = [Y_0, Y_1, Y_2]^T$ z (81).
8. Należy wyznaczyć macierz kowariancji C z C^a (94).

9. Należy wyznaczyć transformację liniową M z (102).
10. Należy wyznaczyć zmienną losową $Q = [0, Q_b, Q_c, Q_d]^T$ przez zastosowanie przekształcenia (99).
11. Należy wyznaczyć zmienną losową o wartościach kwaternionu rozszerzonego $Q^a = A \cdot Q$ (75).

Procedura ta pozwala na generowanie zmiennej losowej o wartościach kwaternionu rozszerzonego z zadaną funkcją gęstości prawdopodobieństwa GGD obejmującą różne inne rozkłady m.in., rozkład Laplace'a i rozkład Gaussa, a w przypadkach granicznych rozkład jednostajny i rozkład impulsowy. Generator ten może znaleźć zastosowanie w wielu praktycznych rozwiązaniach, takich jak modelowanie źródła sygnału, testowanie nieliniowych modeli filtrów adaptacyjnych, znakowanie wodne, generowanie \mathbb{Q} -właściwych i \mathbb{Q} -niewłaściwych procesów, syntezie obrazów kolorowych, testowanie algorytmów wykrywania kroków, itp.

4.3.7 Uogólniony rozkład Gaussa ze zmienną losową kwaternionu czystego rozszerzonego

Jak wspomniano losowe sygnały kwaternionowe można analizować za pomocą rozszerzonych statystyk drugiego rzędu i można modelować je za pomocą uogólnionego rozkładu Gaussa. W przypadku czystych kwaternionów funkcja gęstości prawdopodobieństw podana w [H5] staje się przypadkiem granicznym. Dlatego w tym przypadku w artykule [H11] *wprowadzono dedykowany uogólniony rozkład Gaussa zmiennej losowej kwaternionu czystego rozszerzonego*.

W przytoczonej wcześniej pracy [83], obecność lub brak kroków ludzkich znalazły odzwierciedlenie w różnych wartościach parametrów QGGD. Dane z trzech kanałów ortogonalnych geofonu analizowano jako czysty kwaternion. Dlatego ważne jest, aby zapis funkcji gęstości prawdopodobieństwa był poprawny oraz potrzebna jest sparametryzowana procedura generowania zmiennej losowej do testowania tego systemu.

Wartość wyznacznika macierzy C (91) dla kwaternionu czystego wynosi $|C| = 0$. Biorąc pod uwagę (92), to także $|C^a| = 0$. Wyznacznik macierzy C^a znajduje się we wzorze funkcji gęstości prawdopodobieństwa QGGD (105) w mianowniku, co oznacza, że dla wartości $|C^a|$ dążącej do zera otrzymuje się przypadek graniczny dla reprezentacji QGGD. Dlatego zaproponowano reprezentację funkcji gęstości prawdopodobieństwa GGD dla zmiennej losowej kwaternionu czystego rozszerzonego.

Statystyki drugiego rzędu kwaternionu czystego rozszerzonego

W tej sekcji zostaną zaprezentowane zmodyfikowane równania, ze szczególnym uwzględnieniem kwaternionów czystych, w oparciu o równania dla kwaternionów pełnych. Równania wprowadzone w tej sekcji będą podstawą do utworzenia QGGD dla zmiennej losowej kwaternionu czystego rozszerzonego.

Ponieważ rzeczywista wartość q_a dla kwaternionu czystego q_p wynosi zero, wzory (73) dla trzech prostopadłych inwolucji kwaternionów sprowadzają się do postaci

$$\begin{aligned} q_p^i &= -i q_p i = i q_b - j q_c - \kappa q_d, \\ q_p^j &= -j q_p j = -i q_b + j q_c - \kappa q_d, \\ q_p^\kappa &= -\kappa q_p \kappa = -i q_b - j q_c + \kappa q_d. \end{aligned} \quad (108)$$

Zatem, biorąc pod uwagę te samoodwrotne odwzorowania, kwaternion rozszerzony \vec{q}_p^a dla kwaternionu czystego q_p można utworzyć jako $\vec{q}_p^a = [q_p, q_p^i, q_p^j, q_p^\kappa]^T$.

Zależność pomiędzy kwaternionem czystym rozszerzonym \vec{q}_p^a i wektorem trójwymiarowym o wartościach rzeczywistych \vec{q}_p można również przedstawić w uproszczonej formie

$$\begin{bmatrix} q_p \\ q_p^i \\ q_p^j \\ q_p^\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & \kappa \\ i & -j & -\kappa \\ -i & j & -\kappa \\ -i & -j & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_b \\ q_c \\ q_d \end{bmatrix} \quad (109)$$

i w formie skróconej

$$\vec{q}_p^a = A_p \cdot \vec{q}_p. \quad (110)$$

Należy zauważyć, że macierz A_p nie jest macierzą kwadratową. Macierz A_p ma lewą odwrotność

$$\begin{aligned} A_{p\text{ left}}^{-1} &= (A_p^H \cdot A_p)^{-1} \cdot A_p^H \\ &= (4 \cdot I)^{-1} \cdot A_p^H = \frac{1}{4} \cdot A_p^H, \end{aligned} \quad (111)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową 3×3 .

Odwrotną transformację równania (110) wyznaczającego wektor trójwymiarowy \vec{q}_p o wartościach rzeczywistych zależny od kwaternionu czystego rozszerzonego \vec{q}_p^a można otrzymać, korzystając z lewej macierzy odwrotnej $A_{p\text{ left}}^{-1}$ (111)

$$\vec{q}_p = \frac{1}{4} A_p^H \cdot \vec{q}_p^a. \quad (112)$$

Dla czystej kwaternionowej zmiennej losowej $\vec{Q}_p = [Q_b, Q_c, Q_d]^T$, trójwymiarowa macierz kowariancji o wartościach rzeczywistych C_p ma mniejszy wymiar, tj. 3×3 , niż macierz kowariancji C 4×4 (90)

$$\begin{aligned} C_p &= E\{\vec{Q}_p \cdot \vec{Q}_p^T\} = E\{\vec{Q}_p \cdot \vec{Q}_p^H\} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{Q_b}^2 & \sigma_{Q_b Q_c} & \sigma_{Q_b Q_d} \\ \sigma_{Q_c Q_b} & \sigma_{Q_c}^2 & \sigma_{Q_c Q_d} \\ \sigma_{Q_d Q_b} & \sigma_{Q_d Q_c} & \sigma_{Q_d}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (113)$$

Zakładając, że $\vec{Q}_p^a = [Q_p, Q_p^i, Q_p^j, Q_p^k]^T$ jest zmienną losową kwaternionu czystego rozszerzonego, to po określeniu wartości oczekiwanej $E\{\cdot\}$ iloczynu $\vec{Q}_p^a \cdot \vec{Q}_p^{aH}$, macierz kowariancji kwaternionu czystego rozszerzonego C_p^a przyjmuje postać

$$\begin{aligned} C_p^a &= E\{\vec{Q}_p^a \cdot \vec{Q}_p^{aH}\} = E\{A_p \cdot \vec{Q}_p \cdot \vec{Q}_p^H \cdot A_p^H\} \\ &= A_p \cdot E\{\vec{Q}_p \cdot \vec{Q}_p^H\} \cdot A_p^H = A_p \cdot C_p \cdot A_p^H. \end{aligned} \quad (114)$$

Wymiar rozszerzonej macierzy kowariancji C_p^a wynosi 4×4 .

Bazując na (114), w tym przypadku podobnie macierz C_p^a zależy od macierzy C_p .

Transformację odwrotną do transformacji przedstawionej w (114), gdzie ostatecznie macierz C_p wyrażona jest w zależności od macierzy C_p^a , można przedstawić w postaci

$$C_p = \frac{1}{16} A_p^H \cdot C_p^a \cdot A_p = \frac{1}{16} C_A, \quad (115)$$

gdzie

$$C_A = A_p^H \cdot C_p^a \cdot A_p. \quad (116)$$

Macierz odwrotną C_p^{-1} wyznacza się z (115)

$$C_p^{-1} = 16 \cdot C_A^{-1}. \quad (117)$$

Wyznacznik macierzy C_p można znaleźć z (115)

$$|C_p| = \frac{1}{16^3} |C_A| \quad (118)$$

i zależy od macierzy C_p^a poprzez relację (116).

Jeśli kowariancja pomiędzy składowymi skalarnymi wektora \vec{Q}_p spełnia warunek $\sigma_{XY} = \sigma_{YX}$, to macierz kowariancji kwaternionu czystego rozszerzonego spełnia $C_p^a = C_p^{aH}$. Macierz kowariancji kwaternionu czystego rozszerzonego C_p^a (114) można następnie rozszerzyć na macierze kowariancji

$$C_p^a = C_r + i \cdot C_i + j \cdot C_j + \kappa \cdot C_\kappa, \quad (119)$$

gdzie

$$C_r = \begin{bmatrix} \sigma_{bcd}^2 & \sigma_{b_cd}^2 & \sigma_{c_bd}^2 & \sigma_{d_bc}^2 \\ \sigma_{b_cd}^2 & \sigma_{bcd}^2 & \sigma_{d_bc}^2 & \sigma_{c_bd}^2 \\ \sigma_{c_bd}^2 & \sigma_{d_bc}^2 & \sigma_{bcd}^2 & \sigma_{b_cd}^2 \\ \sigma_{d_bc}^2 & \sigma_{c_bd}^2 & \sigma_{b_cd}^2 & \sigma_{bcd}^2 \end{bmatrix}, \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{bcd}^2 &= \sigma_{Q_b}^2 + \sigma_{Q_c}^2 + \sigma_{Q_d}^2, \\ \sigma_{b_cd}^2 &= \sigma_{Q_b}^2 - \sigma_{Q_c}^2 - \sigma_{Q_d}^2, \\ \sigma_{c_bd}^2 &= -\sigma_{Q_b}^2 + \sigma_{Q_c}^2 - \sigma_{Q_d}^2, \\ \sigma_{d_bc}^2 &= -\sigma_{Q_b}^2 - \sigma_{Q_c}^2 + \sigma_{Q_d}^2, \end{aligned} \quad (121)$$

$$C_i = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{Q_c Q_d} & -\sigma_{Q_c Q_d} \\ 0 & 0 & -\sigma_{Q_c Q_d} & \sigma_{Q_c Q_d} \\ -\sigma_{Q_c Q_d} & \sigma_{Q_c Q_d} & 0 & 0 \\ \sigma_{Q_c Q_d} & -\sigma_{Q_c Q_d} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (122)$$

$$C_j = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_{Q_b Q_d} & 0 & \sigma_{Q_b Q_d} \\ \sigma_{Q_b Q_d} & 0 & -\sigma_{Q_b Q_d} & 0 \\ 0 & \sigma_{Q_b Q_d} & 0 & -\sigma_{Q_b Q_d} \\ -\sigma_{Q_b Q_d} & 0 & \sigma_{Q_b Q_d} & 0 \end{bmatrix}, \quad (123)$$

$$C_\kappa = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{Q_b Q_c} & -\sigma_{Q_b Q_c} & 0 \\ -\sigma_{Q_b Q_c} & 0 & 0 & \sigma_{Q_b Q_c} \\ \sigma_{Q_b Q_c} & 0 & 0 & -\sigma_{Q_b Q_c} \\ 0 & -\sigma_{Q_b Q_c} & \sigma_{Q_b Q_c} & 0 \end{bmatrix}. \quad (124)$$

Jeśli składowe skalarne wektora \vec{Q}_p są nieskorelowane, tj. $\sigma_{XY} = 0$, to macierze kowariancji C_i , C_j i C_κ znikają. W tym przypadku macierz C_p^a sprowadza się do

$$C_p^a = C_r. \quad (125)$$

Jeżeli wszystkie składowe skalarne wektora \vec{Q}_p mają tę samą wariancję, tj. $\sigma_{Q_b}^2 = \sigma_{Q_c}^2 = \sigma_{Q_d}^2 = \sigma^2$, to można uzyskać dalsze uproszczenie

$$C_p^a = \begin{bmatrix} 3\sigma^2 & -\sigma^2 & -\sigma^2 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 3\sigma^2 & -\sigma^2 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & -\sigma^2 & 3\sigma^2 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & -\sigma^2 & -\sigma^2 & 3\sigma^2 \end{bmatrix}. \quad (126)$$

Funkcji gęstości prawdopodobieństwa uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej przyjmującej wartości kwaternionu czystego rozszerzonego

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa 3D GGD (103) została wykorzystana jako punkt wyjściowy do utworzenia nowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

Funkcję kwadratową $\vec{q}_p^T \cdot C_p^{-1} \cdot \vec{q}_p$ w (103) można przekształcić tak, że zamiast zależności od C_p^{-1} i \vec{q}_p istniała zależność od C_p^a i \vec{q}_p^a . Przekształcenia funkcji kwadratowej wykorzystując (112) i (117) prowadzi do otrzymania równania

$$\begin{aligned} \vec{q}_p^T \cdot C_p^{-1} \cdot \vec{q}_p &= \vec{q}_p^H \cdot C_p^{-1} \cdot \vec{q}_p = \\ &= \vec{q}_p^{\dot{a}H} \cdot A_p \cdot C_A^{-1} \cdot A_p^H \cdot \vec{q}_p^{\dot{a}}. \end{aligned} \quad (127)$$

Korzystając ze wzoru na wyznacznik macierzy C_p (118) i przekształconego zapisu funkcji kwadratowej (127), po podstawieniu do funkcji gęstości prawdopodobieństwa (103), powstała nowa postać wzoru QGGD dla zmiennej losowej o wartościach kwaternionu czystego rozszerzonego [H11]

$$f(\vec{q}_p^a) = \frac{32p}{\pi \cdot \sqrt{|C_A|} \cdot s^{\frac{3}{2p}} \Gamma\left(\frac{3}{2p}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{s} \cdot (\vec{q}_p^a H \cdot A_p \cdot C_A^{-1} \cdot A_p^H \cdot \vec{q}_p^a)^p}, \quad (128)$$

która jest sparametryzowana parametrem kształtu p , C_A (116), s (89) i rozszerzoną macierzą kowariancji C_p^a (119).

Procedura generowania zmiennej losowej o wartościach kwaternionu rozszerzonego o rozkładzie QGGD

Do wygenerowania zmiennej losowej można zastosować procedurę opisaną w punkcie 4.3.6, należy jednak zastosować odpowiednie zmiany. Parametry wejściowe generatora to macierz kowariancji kwaternionu czystego rozszerzonego C_p^a (119) i parametr kształtu p . Po określeniu zmiennej losowej $Y = [Y_0, Y_1, Y_2]^T$ zgodnie z krokami z punktu 4.3.6, należy obliczyć trójwymiarową macierz kowariancji C_p na podstawie C_p^a (115) i (116). Transformację liniową można znaleźć, wyznaczając pierwiastek kwadratowy z macierzy C_p .

$$M_p = \sqrt{C_p}. \quad (129)$$

Transformacja ta jest następnie wykorzystana do określenia zmiennej losowej Q_p

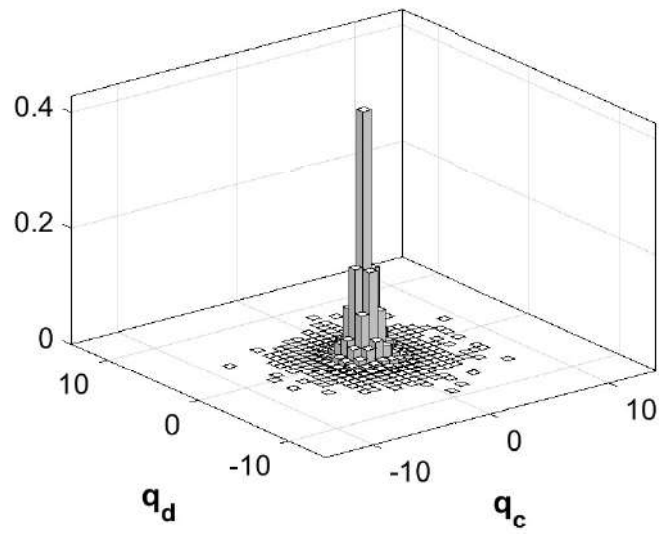
$$Q_p = \begin{bmatrix} Q_b \\ Q_c \\ Q_d \end{bmatrix} = M_p \cdot \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}. \quad (130)$$

Ostatnim krokiem jest utworzenie zmiennej losowej o wartościach kwaternionu czystego rozszerzonego $Q_p^a = A_p \cdot Q_p$ (110).

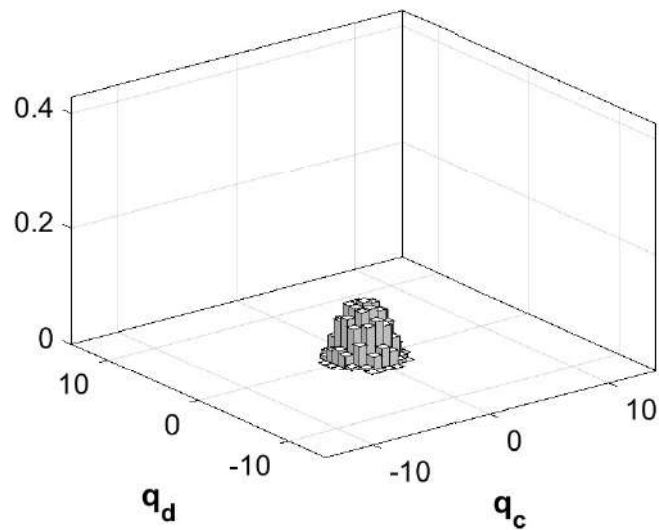
Na przykład, rysunki 54–57 przedstawiają histogramy par zmiennych losowych składników kwaternionów (Q_c, Q_d) i (Q_b, Q_d) . Wybrano dwa przykładowe parametry kształtu $p = 0.3$ (rozkład super-gaussowski) i $p = 5$ (rozkład sub-gaussowski). W obu przypadkach dla każdej składowej Q_b , Q_c i Q_d zostały ustawione odpowiednio odchylenia standardowe $\sigma_{Q_b} = 3$ i $\sigma_{Q_c} = \sigma_{Q_d} = 1$. Kowariancję pomiędzy składnikami Q_b i Q_d ustawiono na $\sigma_{Q_b Q_d} = \sigma_{Q_d Q_b} = -2.6$. Pozostałe kowariancje zostały ustawione na zero: $\sigma_{Q_b Q_c} = \sigma_{Q_c Q_b} = 0$ and $\sigma_{Q_c Q_d} = \sigma_{Q_d Q_c} = 0$.

Rysunek 54 dla $p = 0.3$ pokazuje bardziej spiczasty histogram niż rysunek 55 dla $p = 5$. Widać również, że nie ma korelacji pomiędzy składnikami Q_c i Q_d . Natomiast na rysunku 56 dla $p = 0.3$ i na rysunku 57 dla $p = 5$ widoczny jest efekt niezerowej kowariancji pomiędzy składnikami Q_b i Q_d .

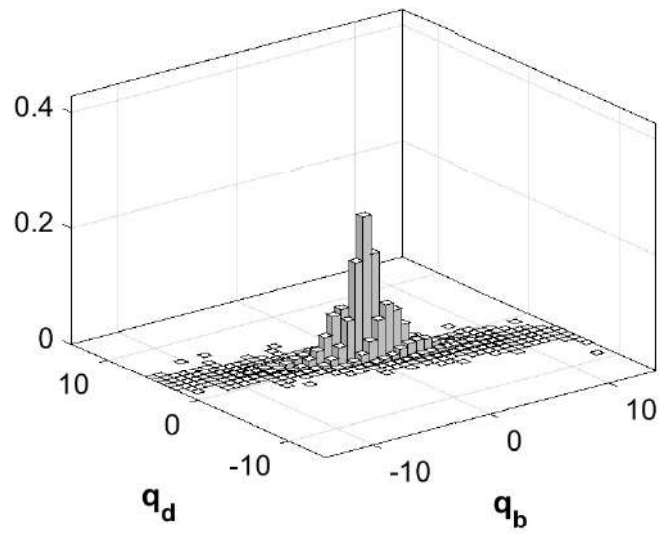
Podsumowując, stosowanie rozszerzonych statystyk drugiego rzędu zyskuje na popularności w przetwarzaniu losowych sygnałów kwaternionowych. Istnieje zatem potrzeba projektowania nowych narzędzi do modelowania i testowania tego typu sygnałów. Wykazano, że wyznacznik rozszerzonej macierzy kowariancji występuje w mianowniku wzoru na QGGD, a dla czystego kwaternionu dąży do zera, zatem otrzymuje się przypadek graniczny. Dlatego **dla zmiennej losowej w postaci kwaternionu czystego rozszerzonego wprowadzono inną reprezentację QGGD** [H11]. Wprowadzony rozkład QGGD pozwala na modelowanie i symulację danych. Analizowane procesy losowe można parametryzować za pomocą macierzy kowariancji C_p^a kwaternionu czystego rozszerzonego i parametru kształtu p . **Dodatkowo podano procedurę dla generatora zmiennej losowej kwaternionu czystego rozszerzonego o rozkładzie GGD**. Co pozwala na tworzenie procesów losowych o zadanych parametrach.



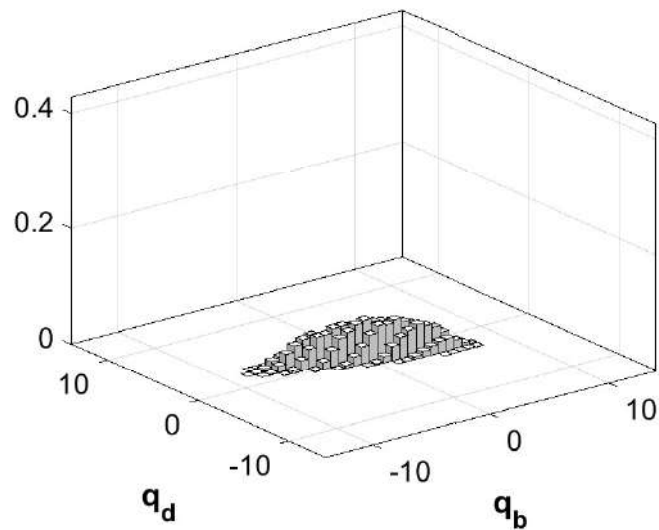
Rysunek 54: Histogram pary zmiennych losowych (Q_c, Q_d) dla parametru kształtu $p = 0.3$ i kowariancji pomiędzy składnikami Q_c i Q_d , gdzie $\sigma_{Q_c Q_d} = \sigma_{Q_c Q_b} = 0$ [H11]



Rysunek 55: Histogram pary zmiennych losowych (Q_c, Q_d) dla parametru kształtu $p = 5$ i kowariancji pomiędzy składnikami Q_c i Q_d , gdzie $\sigma_{Q_c Q_d} = \sigma_{Q_c Q_b} = 0$ [H11]



Rysunek 56: Histogram pary zmiennych losowych (Q_b, Q_d) dla parametru kształtu $p = 0.3$ i kowariancji pomiędzy składnikami Q_b i Q_d , gdzie $\sigma_{Q_b Q_d} = \sigma_{Q_d Q_b} = -2.6$ [H11]



Rysunek 57: Histogram pary zmiennych losowych (Q_b, Q_d) dla parametru kształtu $p = 5$ i kowariancji pomiędzy składnikami Q_b i Q_d , gdzie $\sigma_{Q_b Q_d} = \sigma_{Q_d Q_b} = -2.6$ [H11]

4.3.8 Uogólniony rozkład Gaussa ze zmienną losową kwaternionu \mathbb{H} -właściwego

Obecnie znane rozkłady GGD ze zmienną losową rozszerzonego kwaternionu bazują na rozkładzie 3D GGD. To znaczy, że oparte są na zmiennych losowych z trzema komponentami. W pracy [H13] *wprowadzony został rozkład GGD dla zmiennej losowej rozszerzonego kwaternionu bazujący na GGD dla zmiennej losowej z czterema komponentami*. W celu realizacji tego wykorzystany został rozkład 4D GGD ze zmienną losową składającą się z czterech komponentów, co odpowiada czterem składnikom pełnego kwaternionu.

Następnie rozkład *QGGD został podany dla zmiennej losowej kwaternionu \mathbb{H} -właściwego*. Dla tego rozkładu podane *zostały metody estymacji parametrów z wykorzystaniem metody największej wiarygodności*. Uproszczenie pozwala przedstawić estymatora ML dla parametru kształtu rozkładu GGD eliminując z nieliniowego równania współczynniki powiązane z kowariancją. Dodatkowo w pracy [H13] została zbadana wydajność wprowadzonych estymatorów ML.

Koncepcję \mathbb{H} -właściwości (ang. \mathbb{H} -properness) wprowadzono w [136] jako niezmiennosc funkcji gęstości prawdopodobieństwa (pdf) zmiennej o wartościach kwaternionu q względem dowolnej osi i kąta obrotu ϕ — zmienną q nazywamy \mathbb{H} -właściwą, jeśli $pdf(q) = pdf(e^{\eta\phi}q)$ dla dowolnego czystego kwaternionu jednostkowego η . Zmienne losowe i procesy ze zanikającą pseudokowariancją nazywane są właściwymi [120, 138]. Właściwość (ang. properness) w dziedzinie kwaternionów, oznaczana także jako \mathbb{H} -właściwość, opiera się na znikaniu trzech różnych komplementarnych macierzy kowariancji [120].

Wielowymiarowy uogólniony rozkład Gaussa

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa MGGD o średniej zerowej w \mathbb{R}^d jest zdefiniowana przez [52, 139]

$$f(\vec{x} | d, M, p) = \frac{p \cdot \Gamma(d/2)}{\pi^{d/2} \cdot \Gamma(d/(2p)) \cdot 2^{d/(2p)} \cdot \sqrt{|M|}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot (\vec{x}^T M^{-1} \vec{x})^p\right\} \quad (131)$$

i

$$M = \frac{d \cdot \Gamma(d/(2p))}{2^{1/p} \cdot \Gamma((d+2)/(2p))} \cdot C \quad (132)$$

dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, gdzie C jest macierzą kowariancji $d \times d$, d oznacza wymiar przestrzeni prawdopodobieństwa, \vec{x}^T jest transpozycją wektora \vec{x} , p jest parametrem kształtu MGGD, $\Gamma(\cdot)$ jest funkcją gamma $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, z > 0$ [68].

Przypadki szczególne z wykładnikami $p = 1$ i $p = 0.5$ obejmują odpowiednio wielowymiarowy rozkład Gaussa (MGD) i wielowymiarowy rozkład Laplace'a (MLD). Dla $p \rightarrow \infty$ funkcja gęstości MGGD staje się wielowymiarowym rozkładem jednostajnym [46, 48].

Parametr p rozkładu MGGD można wyznaczyć za pomocą metody ML [48, 50, 140]

$$\begin{aligned} & \frac{d}{2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N u_i^p \cdot \log(u_i)}{\sum_{i=1}^N u_i^p} - \\ & - \frac{d}{2p} \cdot \left[\Psi\left(\frac{d}{2p}\right) + \log(2) \right] - 1 - \\ & - \frac{d}{2p} \cdot \log\left(\frac{p}{d \cdot N} \sum_{i=1}^N u_i^p\right) = 0, \end{aligned} \quad (133)$$

gdzie $u_i = \vec{x}_i^T C^{-1} \vec{x}_i$ i $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log(\Gamma(x))$ jest funkcją digamma [68], i $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N\}$ jest losową próbką N wektorów o wymiarze d . Nieliniowe równanie (133) musi zostać rozwiązane numerycznie ze względu na p , zakładając, że C jest znane.

Estymacja parametru C metodą ML jest rozwiązaniem następującego nieliniowego równania [48, 50]

$$C = \sum_{i=1}^N \frac{d}{u_i + u_i^{1-p} \sum_{j \neq i} u_j^p} \vec{x}_i \vec{x}_i^T, \quad (134)$$

zakładając, że p jest znane.

W ogólnym przypadku zarówno (133), jak i (134) muszą zostać rozwiązane jednocześnie ze względu na parametr p i parametr C .

Równanie (133) dla $d = 1$ po odpowiednich przekształceniach można sprowadzić do postaci metody ML (3) dla przypadku jednowymiarowego.

Uogólniony rozkład Gaussa ze zmienna losową kwaternionu pełnego

Ponieważ pełny kwaternion ma cztery składniki do utworzenia GGD dla pełnego kwaternionu został wykorzystany 4D GGD zamiast 3D GGD (103). Na podstawie (131) i (132) dla $d = 4$ można podać GGD ze średnią zerową dla zmiennej losowej kwaternionu pełnego $\vec{Q} = [Q_a, Q_b, Q_c, Q_d]^T$ jako

$$f(\vec{q}) = \frac{p \cdot \Gamma^2(3/p)}{16\pi^2 \cdot \Gamma^3(2/p) \cdot \sqrt{|C|}} \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\Gamma(3/p)}{4\Gamma(2/p)} \right)^p \cdot (\vec{q}^T C^{-1} \vec{q})^p \right\}. \quad (135)$$

Ta funkcja gęstości prawdopodobieństwa stanowiła podstawę utworzenia GGD ze zmienną losową kwaternionu pełnego rozszerzonego [H13]. W dotychczasowych pracach QGGD bazowało na 3D GGD.

Parametry rozkładu (135) można wyznaczyć korzystając z (133) i (134) dla $d = 4$. Równanie (133) upraszcza się do postaci

$$\frac{1}{p} \cdot \Psi \left(\frac{2}{p} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \cdot \log \left(\frac{p}{2 \cdot N} \sum_{i=1}^N u_i^p \right) - \frac{\sum_{i=1}^N u_i^p \cdot \log(u_i)}{\sum_{i=1}^N u_i^p} = 0, \quad (136)$$

gdzie $u_i = \vec{q}_i^T C^{-1} \vec{q}_i$ i $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N\}$ jest losową próbką N wektorów o wymiarze 4. Zarówno (136), jak i (134) muszą zostać rozwiązane jednocześnie ze względu na parametr p i macierz C .

Uogólniony rozkład Gaussa ze zmienna losową kwaternionu pełnego rozszerzonego

Równanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej kwaternionu pełnego rozszerzonego uzyskuje się przez podstawienie (96) i (104) do (135) [H13]

$$f(\vec{q}^a) = \frac{p \cdot \Gamma^2(3/p)}{\pi^2 \cdot \Gamma^3(2/p) \cdot \sqrt{|C^a|}} \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\Gamma(3/p)}{4\Gamma(2/p)} \right)^p \cdot \left(\vec{q}^a H \cdot (C^a)^{-1} \cdot \vec{q}^a \right)^p \right\}, \quad (137)$$

która jest sparametryzowana przez parametr kształtu p i rozszerzoną macierz kowariancji C^a (92).

Uogólniony rozkład Gaussa ze zmienna losową kwaternionu \mathbb{H} -właściwego

Definicja: (\mathbb{H} -właściwość) [136] Zmienną losową kwaternionu q nazywamy \mathbb{H} -właściwą, jeżeli:

$$q \stackrel{d}{=} e^{n\phi} \eta, \forall \phi \quad (138)$$

dla dowolnego czystego kwaternionu jednostkowego η .

Zmienna losowa będąca kwaternionem \mathbb{H} -właściwym ma rozkład niezmienny względem osi η i dowolnego kąta ϕ .

W tym przypadku reprezentacja rozszerzonej macierzy kowariancji ma następującą strukturę [136]:

$$C^a = 4\sigma_q^2 I_4, \quad (139)$$

gdzie I_4 jest macierzą jednostkową o wymiarze 4×4 i

$$E\{Q_a^2\} = E\{Q_b^2\} = E\{Q_c^2\} = E\{Q_d^2\} = \sigma_q^2. \quad (140)$$

Sygnal \mathbb{H} -właściwy nie jest skorelowany ze swoimi prostopadłymi inwolucjami, a także ma nieskorelowane składowe Q_a, Q_b, Q_c i Q_d , które mają równą wariancję σ_q^2 . Rozkład zmiennej losowej kwaternionu \mathbb{H} -właściwego jest niezmienny względem dowolnej czterowymiarowej transformacji izometrycznej.

Biorąc pod uwagę (139), wyznacznik macierzy kowariancji C^a kwaternionów rozszerzonych można uprościć do

$$|C^a| = (4\sigma_q^2)^4. \quad (141)$$

Po przekształceniu (139), odwrotność macierzy kowariancji kwaternionów rozszerzonych wynosi

$$(C^a)^{-1} = \frac{1}{4\sigma_q^2} I_4. \quad (142)$$

W przypadku zmiennej losowej \mathbb{H} -właściwej można pokazać (używając (141) i (142)), że QGGD (137) upraszcza się do postaci [H13]

$$\begin{aligned} f(\vec{q}^a = [q, q^i, q^j, q^k]^T) &= \\ &= \frac{p \cdot \Gamma^2(3/p)}{16\pi^2 \cdot \Gamma^3(2/p) \cdot \sigma_q^4} \cdot \\ \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\Gamma(3/p)}{4\sigma_q^2 \Gamma(2/p)} \right)^p \cdot (\vec{q}^T \vec{q})^p \right\}, \end{aligned} \quad (143)$$

która jest sparametryzowana parametrem kształtu p . Należy zauważyć, że parametr σ_q nie jest odchyleniem standardowym funkcji gęstości prawdopodobieństwa (143).

Estymatory największej wiarygodności

Estymator największej wiarygodności parametru kształtu p uzyskuje się przez różniczkowanie logarytmu funkcji wiarygodności względem p dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa (143). Wynikowe równanie, które należy rozwiązać numerycznie, podane jest wzorem [H13]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \cdot \Psi \left(\frac{2}{p} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \cdot \log \left[\frac{p}{2 \cdot N} \sum_{i=1}^N (\vec{q}_i^T \vec{q}_i)^p \right] - \\ - \frac{\sum_{i=1}^N (\vec{q}_i^T \vec{q}_i)^p \cdot \log (\vec{q}_i^T \vec{q}_i)}{\sum_{i=1}^N (\vec{q}_i^T \vec{q}_i)^p} = 0. \end{aligned} \quad (144)$$

Rozwiązaniem równania (144) jest wyestymowana wartość \hat{p} . Należy zwrócić uwagę na podobieństwo do (136), z którego usunięto zależność od macierzy kowariancji C .

Estymator największej wiarygodności parametru σ_q uzyskuje się przez różniczkowanie logarytmu funkcji wiarygodności względem σ_q dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa (143). Wynikowe równanie wynosi [H13]

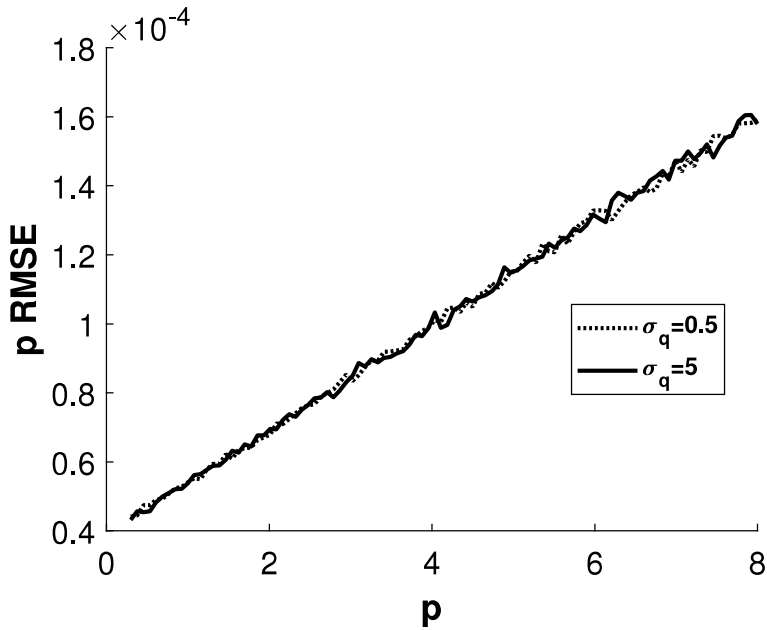
$$\hat{\sigma}_q = 0.5 \left(\frac{\Gamma(3/p)}{\Gamma(2/p)} \right)^{0.5} \left[\frac{p}{2N} \sum_{i=1}^N (\vec{q}_i^T \vec{q}_i)^p \right]^{1/(2p)}, \quad (145)$$

gdzie $\hat{\sigma}_q$ oznacza wyestymowaną wartość. Znalezioną wartość p z (144) podstawia się do (145) w celu wyznaczenia $\hat{\sigma}_q$.

Równanie o takiej samej formie jak (144) można uzyskać, używając (136) i informacji, że macierz kowariancji ma następującą strukturę [136]

$$C = \sigma_q^2 I_4 \quad (146)$$

dla zmiennej losowej kwaternionu \mathbb{H} -właściwego.



Rysunek 58: Porównanie RMSE dla metody ML estymacji parametru kształtu p (144) rozkładu QGGD ze zmienną wartością parametru kształtu p i wybranymi stałymi wartościami $\sigma_q = 0.5$ i $\sigma_q = 5$ w generatorze MGGD [H13]

Badania eksperymentalne

Do oceny skuteczności wprowadzonych estymatorów zastosowano względny błąd średniokwadratowy (RMSE). RMSE obliczono z równania (37), osobno dla estymowanej wartości \hat{p} metodą największej wiarygodności i rzeczywistej wartości p oraz dla estymowanej wartości $\hat{\sigma}_q$ i rzeczywistej wartości σ_q . Liczbę powtórzeń we wszystkich eksperymentach przyjęto równą $M = 10^4$.

Najpierw wartość parametru kształtu \hat{p} została wyznaczona na podstawie (144). Następnie znaną wartość \hat{p} podstawiono do (145) i wyznaczono wartość $\hat{\sigma}_q$. Eksperyment powtórzono M razy i dla wyznaczonych wartości \hat{p} i $\hat{\sigma}_q$ obliczono odpowiednio p RMSE i σ_q RMSE.

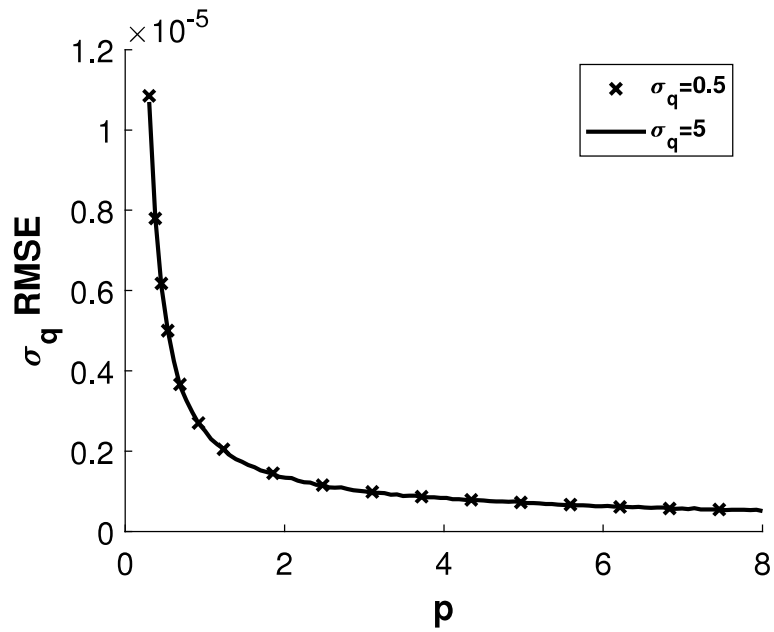
Równania (144) i (145) zostały zweryfikowane za pomocą generatora MGGD [46, 48] ze stałym parametrem $\sigma_q = 0.5$ lub $\sigma_q = 5$ i zmiennym parametrem kształtu w zakresie $p \in \langle 0.3, 8 \rangle$. Zakres parametru p wybrano jako najczęściej stosowany w literaturze przy modelowaniu sygnałów z wykorzystaniem GGD. Rozmiar wektora N został ustawiony na $5 \cdot 10^4$. Ponieważ σ_q^2 odpowiada wariancji składowych Q_a, Q_b, Q_c i Q_d , rysunki 58 i 59 przygotowano dla małej wartości wariancji $\sigma_q^2 = 0.5^2$ i relatywnie dużej wartości wariancji $\sigma_q^2 = 5^2$. Na rysunku 58 przedstawione jest, że wraz ze wzrostem wartości parametru kształtu p wzrasta także RMSE estymatora parametru kształtu. Jednakże bez względu na to, czy jest to $\sigma_q = 0.5$ czy $\sigma_q = 5$, nie wpływa to znacząco na p RMSE.

W przypadku parametru σ_q RMSE estymatora parametru σ_q maleje wraz ze wzrostem wartości parametru kształtu p (rysunek 59). Również w tym przypadku, niezależnie czy jest to $\sigma_q = 0.5$ czy $\sigma_q = 5$, nie ma to znaczącego wpływu na σ_q RMSE.

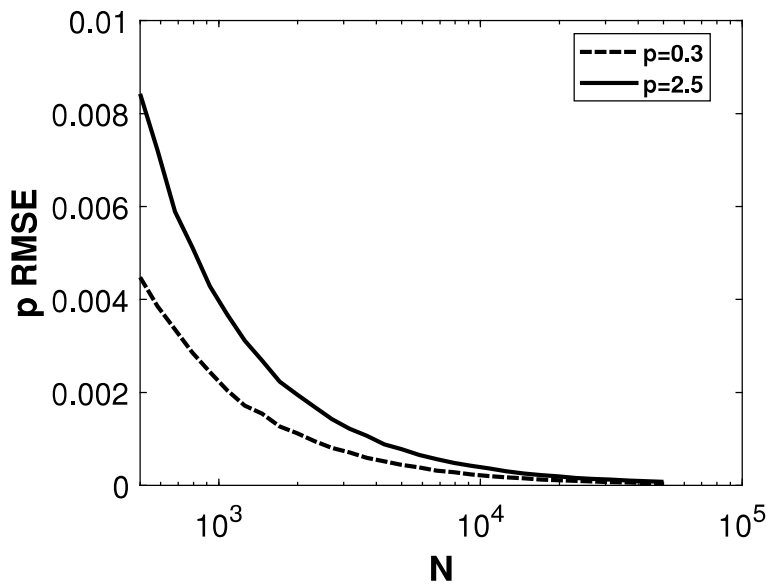
W kolejnym kroku został zbadany wpływ rozmiaru próby N na wartość RMSE. Zakres zmian parametru N został ustawiony od $5 \cdot 10^2$ do $5 \cdot 10^4$. Wartość parametru σ_q została ustawiona na stałą wartość 1. Zgodnie z oczekiwaniami dokładność estymatorów ML maleje wraz ze zmniejszaniem się rozmiaru próby. Dlatego w przypadku estymatorów ML zaleca się stosowanie dużych rozmiarów próby. Wyniki pokazano na rysunkach 60 i 61.

Zgodnie z rysunkiem 60, w przypadku małych rozmiarów próby i bardziej impulsywnego rozkładu $p = 0.3$, estymator ML parametru p ma mniejszy błąd RMSE niż w przypadku rozkładu z $p = 2.5$. Przeciwnie zachowanie zaobserwowano dla RMSE estymatora σ_q (rysunek 61). Wartości σ_q RMSE dla rozkładu bardziej impulsywnego $p = 0.3$ są większe niż te dla rozkładu $p = 2.5$.

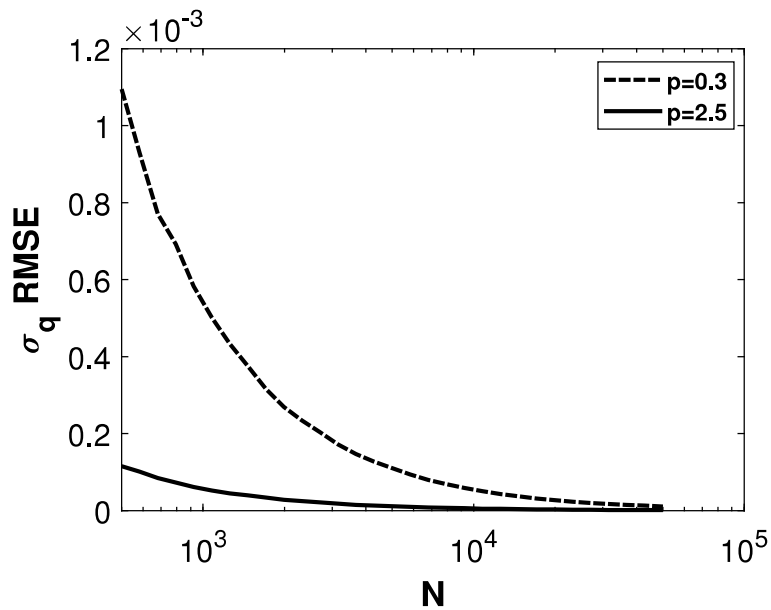
Dodatkowo, równania (144) i (145) zostały zweryfikowane przy użyciu generatora MGGD ze stałym parametrem kształtu $p = 0.3$ lub $p = 2.5$ i zmiennym parametrem σ_q w zakresie $\sigma_q \in \langle 0.1, 10 \rangle$. Na



Rysunek 59: Porównanie RMSE dla metody ML estymacji parametru σ_q (145) rozkładu QGGD ze zmienną wartością parametru kształtu p i wybranymi stałymi wartościami $\sigma_q = 0.5$ i $\sigma_q = 5$ w generatorze MGGD [H13]



Rysunek 60: Porównanie RMSE dla metody ML estymacji parametru kształtu p (144) rozkładu QGGD ze zmienną wielkością rozmiaru próby N i ustaloną stałą wartością $\sigma_q = 1$ w generatorze MGGD dla $p = 0.3$ i $p = 2.5$ [H13]



Rysunek 61: Porównanie RMSE dla metody ML estymacji parametru σ_q (145) rozkładu QGGD ze zmienną wielkością rozmiaru próby N i ustaloną stałą wartością $\sigma_q = 1$ w generatorze MGGD dla $p = 0.3$ i $p = 2.5$ [H13]

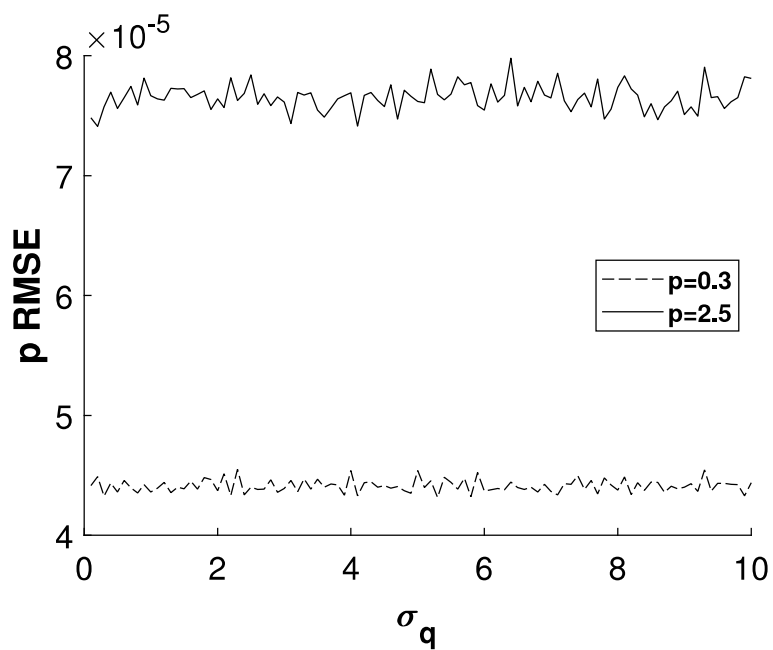
rysunkach 58 i 59 zauważono, że wartości p RMSE i σ_q RMSE są porównywalne dla $\sigma_q = 0.5$ i $\sigma_q = 5$ i tej samej wartości p . Można to również zobaczyć na rysunkach 62 i 63, gdzie dla zmiennej wartości σ_q w zakresie $< 0.1, 10 >$ wartości p RMSE i σ_q RMSE utrzymują się na średnim stałym poziomie.

Wartości p RMSE i σ_q RMSE są w większym stopniu zależne od p niż od σ_q dla rozważanych wartości.

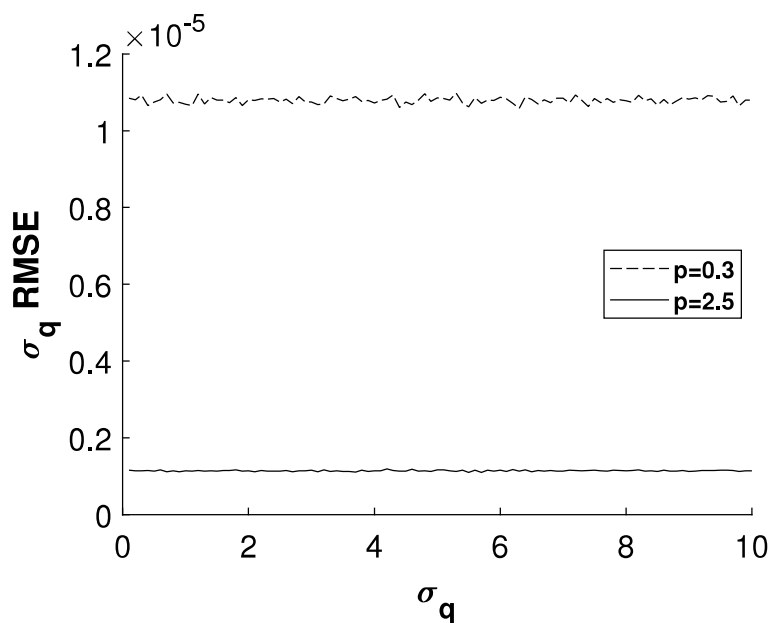
Podsumowując, GGD i kwaterniony rozszerzone znalazły zastosowanie w wielu aplikacjach inżynierskich. W literaturze można znaleźć GGD dla różnych typów zmiennych losowych. Umożliwia to modelowanie różnych procesów i testowanie różnych systemów. Znane dotychczas GGD ze zmienną losową w postaci kwaternionu rozszerzonego opierały się na trójwymiarowym GGD. Oznacza to, że opierały się na zmiennych losowych zawierających trzy składniki. W [H13] *wykorzystano 4D GGD z czterema losowymi składnikami odpowiadającymi czterem składnikom pełnego kwaternionu*. Na podstawie tego rozkładu *podano funkcję gęstości prawdopodobieństwa dla GGD ze zmienną losową w postaci kwaternionu rozszerzonego*. Następnie przypomniano definicję \mathbb{H} -właściwości i podany wcześniej *QGGD uproszczono do GGD dla zmiennej losowej kwaternionu \mathbb{H} -właściwego*. Dla tego ostatniego rozkładu *zostały wyprowadzone estymatory metodą ML*. W części eksperymentalnej sprawdzono działanie estymatorów. Pokazano, że w przypadku kryterium RMSE zalecana jest relatywnie duża próba losowa.

4.3.9 Zastosowanie uogólnionego rozkładu Gaussa w wibroakustycznym wykrywaniu uszkodzeń rdzenia transformatora mocy

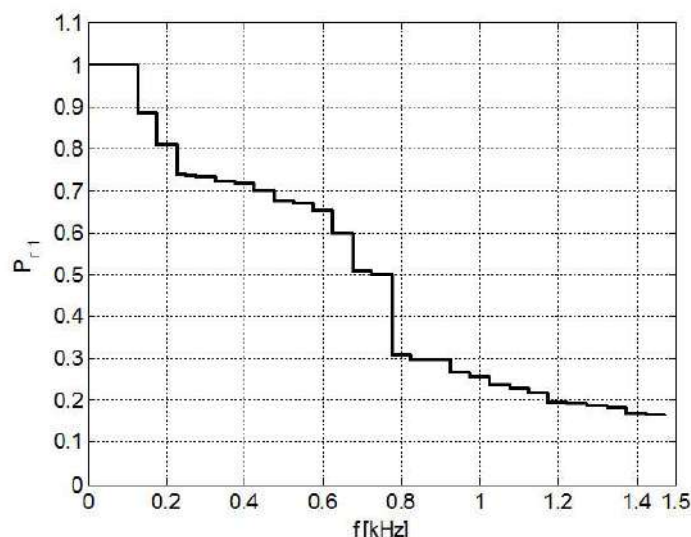
Transformatory są jednym z najważniejszych elementów systemu elektroenergetycznego. Wysokie koszty produkcji i napraw wymuszają na operatorach szczególną dbałość o stan techniczny. Choć niezawodność transformatorów jest wysoka, ich wady mają zwykle poważne konsekwencje, zarówno techniczne, jak i ekonomiczne. Diagnostyka prewencyjna jest podstawowym narzędziem gwarantującym optymalizację kosztów związanych z utrzymaniem sieci dystrybucyjnej energii, w tym transformatorów. W diagnostyce transformatorów niezwykle cenne jest stwierdzenie z dużym prawdopodobieństwem faktu istnienia defektu. Można w ten sposób uniknąć wykonywania niepotrzebnej, w przypadku braku wady, bardzo kosztownej inspekcji wewnętrznej. Diagnostyka wibroakustyczna (ang. Vibroacoustic Method, VM) jest jedną z metod diagnozowania części aktywnej transformatorów energetycznych. Metoda wibroakustyczna polega na rejestracji sygnału przyspieszenia drgań kadzi transformatora, a następnie



Rysunek 62: Porównanie RMSE dla metody ML estymacji parametru kształtu p (144) rozkładu QGGD ze zmienną wartością parametru σ_q i wybranymi stałymi wartościami $p = 0.3$ i $p = 2.5$ w generatorze MGGD [H13]



Rysunek 63: Porównanie RMSE dla metody ML estymacji parametru σ_q (145) rozkładu QGGD ze zmienną wartością parametru σ_q i wybranymi stałymi wartościami $p = 0.3$ i $p = 2.5$ w generatorze MGGD [H13]



Rysunek 64: Względne zmiany mocy drgań w funkcji częstotliwości $P_r(f)$ dla przykładowego transformatora [H9]

numerycznej analizie zarejestrowanych danych. W okresie ostatnich kilkunastu lat dopracowano technologie wykonywania pomiarów, lecz metody analizy danych uzyskanych w diagnostyce VM jeszcze są fazie rozwoju. W większości przypadków opierają się na prostej analizie widma częstotliwościowego, a wnioski diagnostyczne są subiektywne i zależą od doświadczenia zawodowego eksperta.

Dr hab. inż. Eugeniusz Kornatowski, prof. ZUT w swoich badaniach przeprowadził analizę właściwości statystycznych sygnału drgań zarejestrowanego na powierzchni kadzi nieobciążonego transformatora w stanie drgań ustalonych (metoda VM). Na podstawie analizy FFT sygnału wibroakustycznego wyznaczył względną zmianę mocy drgań w funkcji częstotliwości $P_r(f)$ [141]. Przebieg sygnału $P_r(f)$ dla przykładowego transformatora przedstawiony jest na rysunku 64.

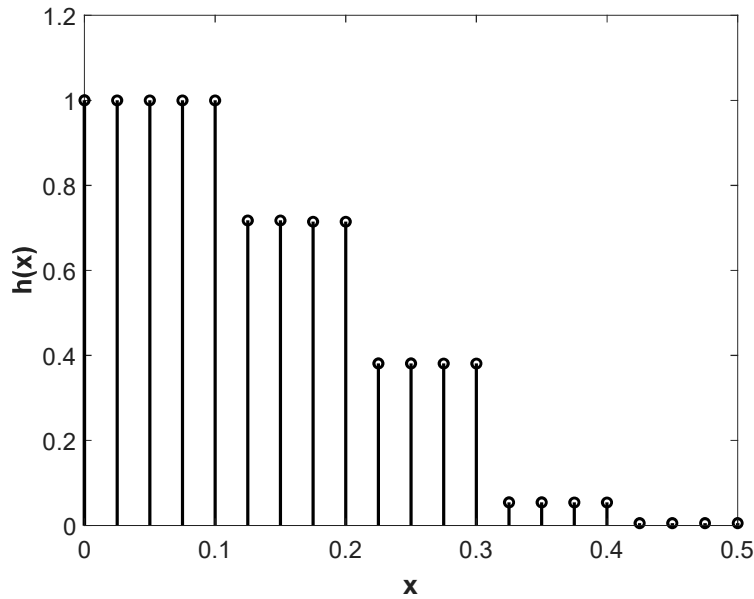
Wykorzystując tak wyznaczone dane dla rzeczywistego transformatora **został zaproponowany detektor wad konstrukcji mechanicznej rdzenia transformatora energetycznego bazujący na uogólnionym rozkładzie Gaussa** [H9].

Do zmierzonych tak danych można by, po wszelkich wymaganych przekształceniach, zastosować parametryczny model, który przybliżyłby dane po przekształceniach, następnie za pomocą dowolnej metody optymalizacji dopasować dane do modelu i znaleźć parametry modelu. W przypadku tego nowego detektora został zaprojektowany model statystyczny, którego parametry uzyskuje się korzystając z dowolnych istniejących narzędzi estymacji parametrów otrzymanego modelu, w tym przypadku estymatorów parametrów uogólnionego rozkładu Gaussa.

Model statystyczny detektora GGD uszkodzeń rdzenia transformatora mocy

Funkcjonalność detektora została oparta na wyznaczeniu funkcji gęstości prawdopodobieństwa na podstawie względnej zmiany mocy drgań $P_r(f)$. Kolejne etapy postępowania dla modelu statystycznego w celu uzyskania wielkości wyjściowych detektora można opisać następująco [H9]:

- na podstawie obliczonych danych rzeczywistego transformatora $P_r(f)$ wyznacza się funkcję gęstości prawdopodobieństwa;
- w kolejnym etapie wyznacza się dystrybuantę dla otrzymanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz zmodyfikowaną odcinkowo liniową dystrybuantę wykorzystaną do utworzenia nowej zmiennej losowej z symetryczną funkcją gęstości prawdopodobieństwa;
- następnie korzystając z tak utworzonego rozkładu generowane są losowe próbki;
- w kolejnym kroku rozkład otrzymanych zmiennych losowych aproksymowany jest uogólnionym rozkładem Gaussa przez estymowane parametry λ i p ;



Rysunek 65: Funkcja gęstości prawdopodobieństw $h(x)$ (147) dla wybranego transformatora normalnie pracującego dla punktów x_i z odpowiadającymi im prawdopodobieństwami h_i [H9]

- wielkości wyjściowe detektora to para parametrów λ i p rozkładu GGD (1).

Model statystyczny detektora utworzony jest w następujący sposób: na podstawie względnej zmiany mocy drgań $P_r(f)$ wyznacza się zestaw punktów $h_i = P_r(x_i)$ dla $i = 0, \dots, M$, gdzie $x_i < x_{i+1}$.

Zakładając rozkład z punktami x_i z odpowiednimi prawdopodobieństwami h_i , funkcję gęstości prawdopodobieństwa $h(x)$ można zapisać za pomocą delty Diraca $\delta(x)$ jako:

$$h(x) = \sum_{i=0}^M h_i \cdot \delta(x - x_i), \text{ dla } x \geq 0. \quad (147)$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $h(x)$ transformatora normalnie pracującego pokazana jest na rysunku 65.

W następnym kroku wyznacza się dystrybuantę poprzez całkowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Aby rozpocząć całkowanie od najmniejszych wartości prawdopodobieństwa h_i i od $x = -\infty$, funkcję $h(x)$ należy przekształcić symetrycznie względem osi Y:

$$g(x) = \sum_{i=0}^M h_i \cdot \delta(x + x_i), \text{ dla } x \leq 0. \quad (148)$$

Nieznormalizowaną dystrybuantę można zapisać jako:

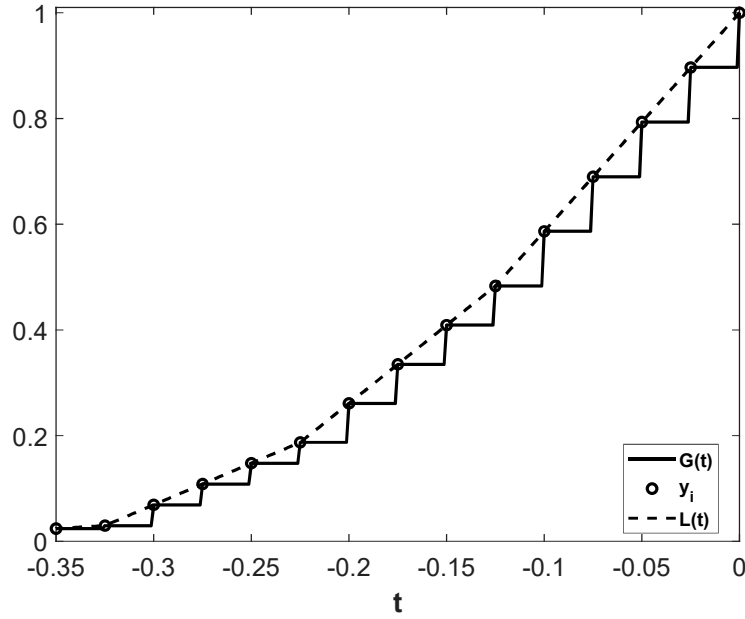
$$H(t) = \int_{-\infty}^t g(x) dx = \sum_{i=0}^M h_i \cdot u(t + x_i), \text{ dla } t \leq 0, \quad (149)$$

gdzie $u(t)$ jest funkcją skokową Heaviside'a:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \geq 0 \\ 0, & \text{dla } x < 0 \end{cases}. \quad (150)$$

Dystrybuantę otrzymuje się dzieląc $H(t)$ przez cały obszar $g(x)$:

$$G(t) = \frac{H(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx} = \sum_{i=0}^M g_i \cdot u(t + x_i), \text{ dla } t \leq 0, \quad (151)$$



Rysunek 66: Dystrybuanta $G(t)$ dla transformatora normalnie pracującego i odpowiadająca odcinkowo liniowa dystrybuanta $L(t)$ oraz punkty $y_i = G(-x_i)$ [H9]

gdzie

$$g_i = \frac{h_i}{A} \quad (152)$$

i współczynnik normalizacji wynosi:

$$A = \sum_{i=0}^M h_i. \quad (153)$$

Ta dystrybuanta dla transformatora normalnie pracującego pokazana jest na rysunku 66.

Wartości $y_i = G(-x_i)$ dla punktów x_i można obliczyć na dwa sposoby: rekurencyjnie (154) i nie-rekurencyjnie (155).

$$y_i = y_{i+1} + g_i, \text{ gdzie } y_{M+1} = 0 \quad (154)$$

$$y_i = \sum_{j=i}^M g_j \quad (155)$$

Punkty y_i przedstawione są na rysunku 66.

Proponuje się ulepszyć funkcję $G(t)$ jako odcinkowo liniową, zamiast generować zmienną losową z taką dystrybuantą przez odwrócenie $G(t)$. Odcinkowo liniowa dystrybuanta z punktami kontrolnymi y_i może być zdefiniowana jako:

$$L(t) = u(t) \cdot y_0 + \sum_{i=0}^{M-1} \left(\frac{t+x_{i+1}}{-x_i+x_{i+1}} \cdot (y_i - y_{i+1}) + y_{i+1} \right) \cdot [u(t+x_{i+1}) - u(t+x_i)], \text{ dla } t \leq 0. \quad (156)$$

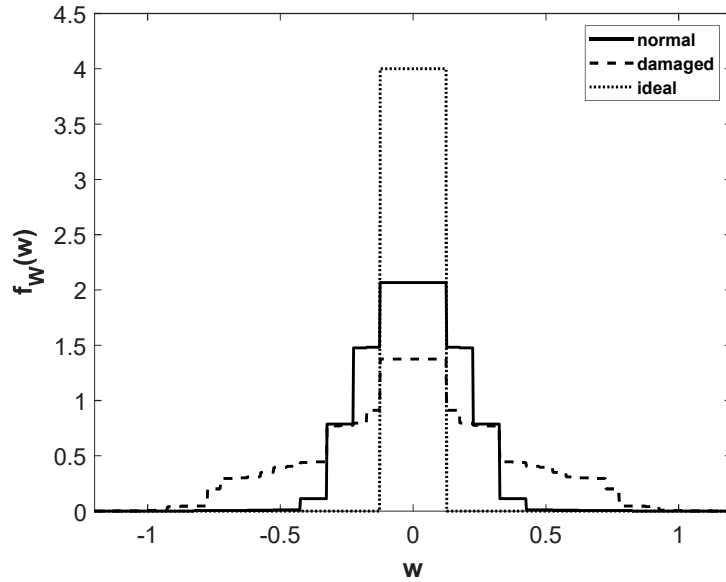
Ta odcinkowo liniowa dystrybuanta dla transformatora normalnie działającego pokazana jest na rysunku 66.

Odwrotność $L(t)$ wymagana jest do uzyskania zmiennej losowej T :

$$T = L^{-1}(Z), \quad (157)$$

gdzie Z jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym:

$$f_Z(z) = 1, Z \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (158)$$



Rysunek 67: Symetryczna funkcja gęstości prawdopodobieństwa (164) dla transformatora normalnie pracującego (normal), uszkodzonego (damaged) i idealnego (ideal) [H9]

Rozkład T znajduje się poprzez transformację funkcji gęstości jako:

$$f_T(t) = f_Z(z) \cdot \left| \frac{dz}{dt} \right| = \left| \frac{dL(t)}{dt} \right|, \text{ dla } t \leq 0. \quad (159)$$

Aby stworzyć symetryczną funkcję gęstości, stosuje się dodatkową zmienną losową S . Bazuje ona na rozkładzie Rademachera, gdzie funkcja masy prawdopodobieństwa wynosi:

$$f_S(s) = \begin{cases} 0.5, & \text{dla } s = 1 \\ 0.5, & \text{dla } s = -1 \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}. \quad (160)$$

Ze względu na niezależność T i S :

$$f_{TS}(t, s) = f_T(t) \cdot f_S(s), \quad (161)$$

wspólna funkcja gęstości prawdopodobieństwa T i S wynosi:

$$f_{TS}(t, s) = \left| \frac{dL(t)}{dt} \right| \cdot 0.5, \text{ dla } t \leq 0 \wedge |s| = 1. \quad (162)$$

Nowa utworzona zmienna losowa W to:

$$W = T \cdot S, \quad (163)$$

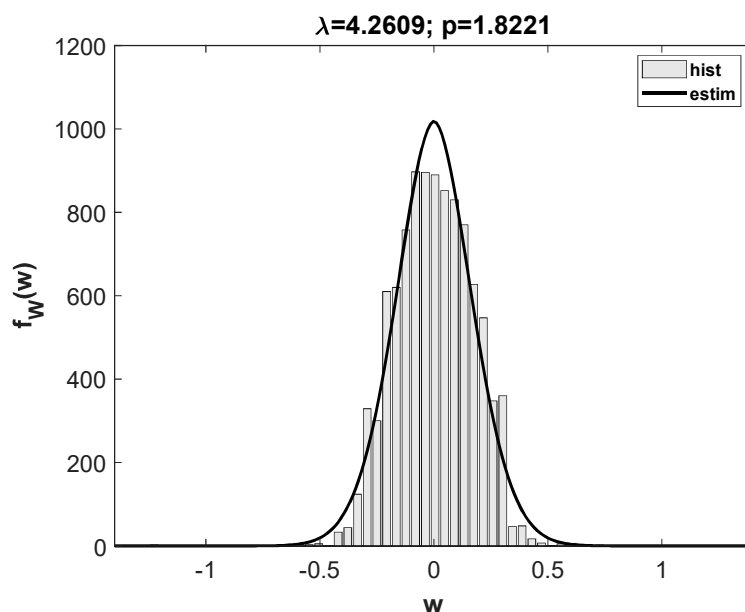
gdzie funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej W otrzymuje się:

$$f_W(w) = \left| \frac{dL(-|w|)}{dw} \right| \cdot 0.5, \text{ dla } w \in R. \quad (164)$$

Symetryczne funkcje gęstości prawdopodobieństwa $f_W(w)$ dla transformatora normalnie pracującego, uszkodzonego i idealnego przedstawiono na rysunku 67.

Biorąc pod uwagę współczynniki x_i i h_i , procedurę generowania próbek dla symetrycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa (164) można opisać w następujących krokach [H9]:

1. należy wygenerować zmienną losową o rozkładzie jednostajnym Z ze wzoru (158);
2. należy obliczyć zmienną losową T ze wzoru (157);



Rysunek 68: Histogram uzyskany dla normalnie pracującego transformatora i dopasowany rozkład GGD [H9]

3. następnie należy wygenerować zmienną losową S za pomocą wzoru (160);
4. ostatecznie należy obliczyć zmienną losową W ze wzoru (163).

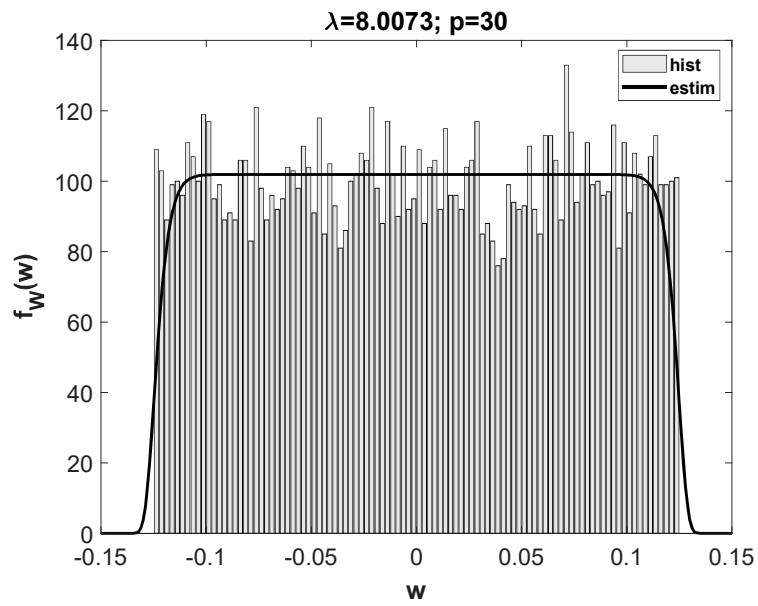
Symetryczna funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej W jest aproksymowana przez rozkład GGD. Korzystając z dowolnych estymatorów rozkładu GGD wyznacza się parametry λ i p . Na tej podstawie otrzymane są parametry charakteryzujące rozkład GGD. Wielkości wyjściowe detektora to para parametrów λ i p rozkładu GGD. Te dwie wartości liczbowe stanowią podstawę klasyfikacji stanu technicznego rdzenia jednostki transformatorowej.

Poprawność opisanego rozwiązania zweryfikowano na przykładzie 10 sztuk transformatorów energetycznych o mocy 16 MVA o zróżnicowanym czasie eksploatacji i stopniu zużycia oraz jednego uszkodzonego transformatora. Następnie dla wszystkich przypadków wyznaczono względne zmiany mocy drgań $P_r(f)$. Przypadek idealnego transformatora został również dodany do pomiarów tworząc 12 kompletów $\{h_i = P_r(x_i)\}$. Dla każdego zestawu wygenerowano odpowiednie próbki losowe, dając 12 zestawów próbek losowych. W następnym kroku metody największej wiarygodności GGD zostały zastosowane do każdej sekwencji losowych próbek w celu znalezienia parametrów p i λ , dając 12 par (p, λ) . Liczba losowych próbek została wybrana jako 10 000, aby stosunkowo szybko uzyskać wynik. W przypadku idealnego transformatora rozwiązanie równania ML dla parametru kształtu p dążyło do nieskończoności, dlatego wykładnik p został ograniczony do 30.

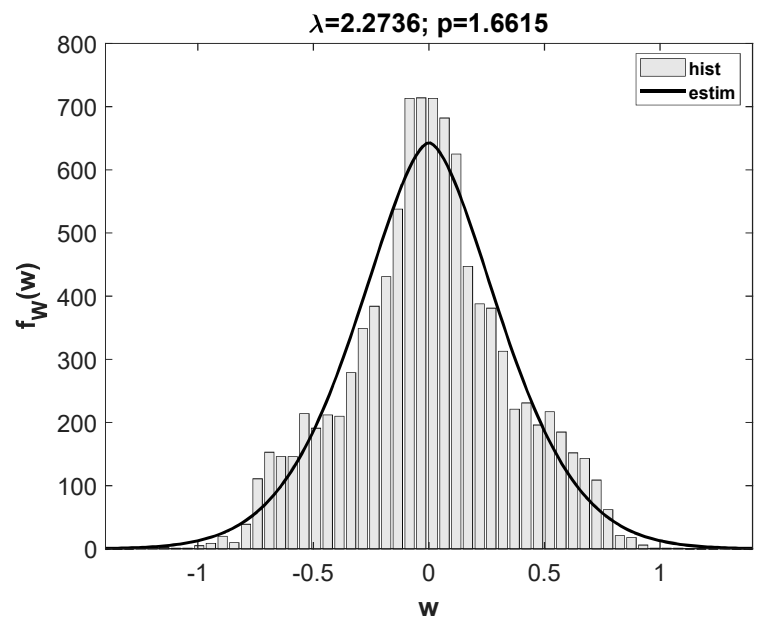
Histogram uzyskany dla normalnie pracującego transformatora i dopasowany rozkład GGD (1) pokazano na rysunku 68. Histogramy uzyskane dla idealnego i uszkodzonego transformatora oraz dopasowane rozkłady GGD przedstawione są odpowiednio na rysunkach 69 i 70.

Na rysunku 71 na płaszczyźnie 2D zostały umieszczone pary parametrów λ i p rozkładów GGD dla rozpatrywanych transformatorów. Na rysunku tym widoczne jest, że para parametrów λ i p dla uszkodzonego transformatora mieści w innej części wykresu (po lewej stronie) niż pary parametrów λ i p dla prawidłowo pracujących transformatorów, co pozwala na wyznaczenie obszarów detektora na płaszczyźnie λp . Najdłużej pracował transformator, którego parametry GGD na rysunku 71 oznaczono symbolem *. Wyprodukowano go w 1975 roku. Jak wynika z historii działania tej jednostki, kilkakrotnie ulegała awarii w wyniku przeciążeń. Współrzędne na płaszczyźnie $p\lambda$ i rysunek 70 wskazują, że parametr λ tego transformatora był najmniejszy ze wszystkich analizowanych włącznie z przypadkiem idealnym. Natomiast transformator o parametrach GGD zaznaczonych na rysunku 71 po prawej (symbol o, $\lambda \approx 13$) był najnowszym egzemplarzem wyprodukowanym w 2007 roku pracującym bez zarzutu.

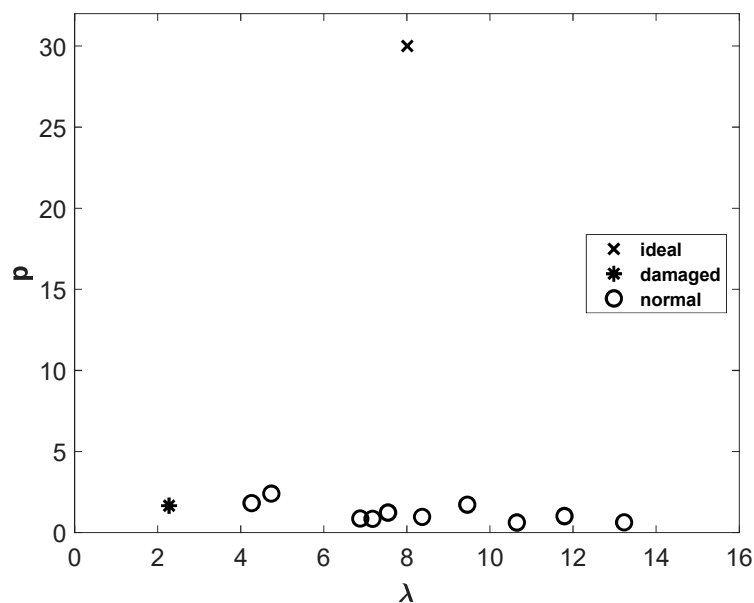
Stan techniczny wszystkich transformatorów, których dane analizy wibroakustycznej wykorzystano



Rysunek 69: Histogram uzyskany dla idealnego transformatora i dopasowany rozkład GGD [H9]



Rysunek 70: Histogram uzyskany dla uszkodzonego transformatora i dopasowany rozkład GGD [H9]



Rysunek 71: Płaszczyzna 2D wyznaczonych par parametrów λ i p rozkładów GGD dla prawidłowo pracujących transformatorów (normal), dla transformatora idealnego (ideal) i dla transformatora uszkodzonego (damaged) [H9]

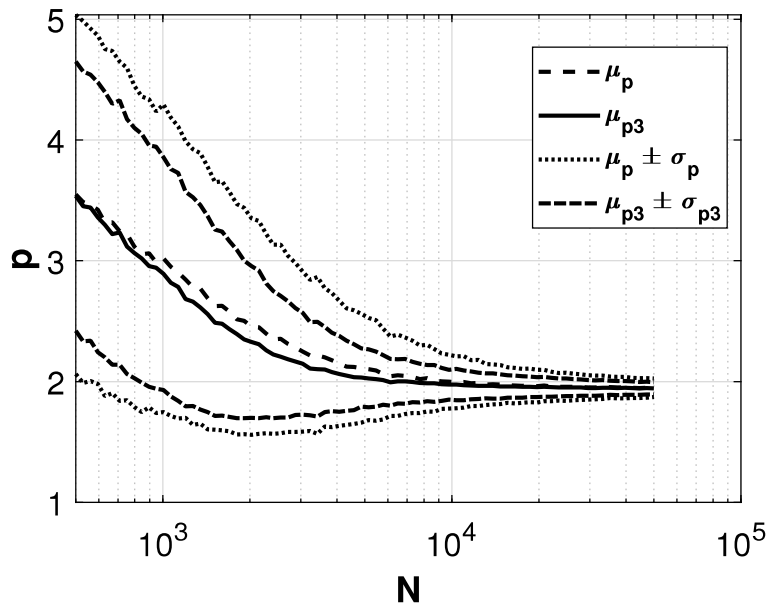
był weryfikowany innymi metodami diagnostycznymi, a w szczególności:

- metoda analizy odpowiedzi częstotliwościowej (ang. Frequency Response Analysis, FRA method),
- chromatografia gazowa (ang. gas chromatography, Dissolved Gas Analysis, DGA),
- pomiar zawartości związków furanu,
- pomiar zawartości wody,
- badania podstawowych właściwości elektrycznych: współczynnika strat dielektrycznych ($\tan \delta$), rezystancji skrośnej, napięcia przebicia.

Wyniki diagnostyczne - przy czasochłonnym procesie diagnozowania - były zbieżne z wynikami uzyskanymi metodą wibroakustyczną z wykorzystaniem GGD. Ponieważ diagnoza (szczególnie wibroakustyczna GGD) transformatora z 1975 roku wskazywała na duże prawdopodobieństwo znacznej degradacji części aktywnej (w szczególności rdzenia) zdecydowano o wykonaniu inspekcji wewnętrznej. Wynik inspekcji był jednoznaczny: stwierdzono liczne deformacje uzwojeń i rozpakietowanie rdzenia. Deformacje uzwojeń były wynikiem ubytku klinów blokujących na skutek m.in. nadmiernych drgań rdzenia z powodu rozpakietowania blach stanowiących jego konstrukcję. Transformator został wycofany z eksploatacji.

Wraz z dr. hab. inż. E. Kornatowskim, prof. ZUT otrzymaliśmy w ten sposób nowatorską obiektywną metodę detekcji uszkodzeń rdzenia jednostki transformatorowej oraz wskazaliśmy nowy obszar badań detekcji uszkodzeń metodami statystycznymi. Niskie koszty przemysłowego wykorzystania zaproponowanego rozwiązania czynią go bardzo atrakcyjnym.

Na obecnym etapie rozwoju metody wykorzystania analizy GGD w diagnostyce wibroakustycznej stanu mechanicznego części czynnej transformatora, a w szczególności stanu rdzenia, nie jest jeszcze możliwe określenie granicy (krytycznej) wartości parametrów p i λ . Wynika to z faktu, że wartości te należy zweryfikować doświadczalnie dla poszczególnych grup transformatorów. Należy wziąć pod uwagę moc urządzenia, napięcia oraz cechy konstrukcyjne związane np. z podłączeniem uzwojeń. Wdrożenie opracowanej metody uwarunkowane jest przeprowadzeniem licznych badań na jednostkach transformatorowych o zróżnicowanej mocy, cechach konstrukcyjnych i okresie eksploatacji. Jest oczywiste, że badania te są czasochłonne i kosztowne, głównie z powodu konieczności dokonania inspekcji wewnętrznej, która gwarantuje jednoznaczne potwierdzenie poprawności wyników detekcji GGD.



Rysunek 72: Wartość średnia μ_p i odchylenie standardowe σ_p estymowanej wartości p w miarę wzrostu rozmiaru losowej próby N w porównaniu do wartości średniej μ_{p3} i odchylenia standardowego σ_{p3} estymowanej wartości $p3$ dla metody ML i wybranego transformatora [H12]

Za pomocą detektora nie jest możliwe dokładne określenie rodzaju uszkodzenia, co nie umniejsza wartości proponowanej metody. W diagnostyce transformatorów niezwykle cenne jest stwierdzenie istnienia wady z dużym prawdopodobieństwem. W ten sposób można uniknąć niepotrzebnej, przy braku wady, bardzo kosztownej kontroli wewnętrznej. Przeprowadzone badania eksperymentalne oraz porównanie wyników z innymi metodami diagnostycznymi dowiodły, że metoda może być wykorzystana bez ingerencji eksperta-diagnosty.

Prace nad wdrożeniem wibroakustycznego diagnozowania jednostek transformatorowych są obecnie prowadzone we współpracy z polską firmą Energo-Complex z Piekar Śląskich.

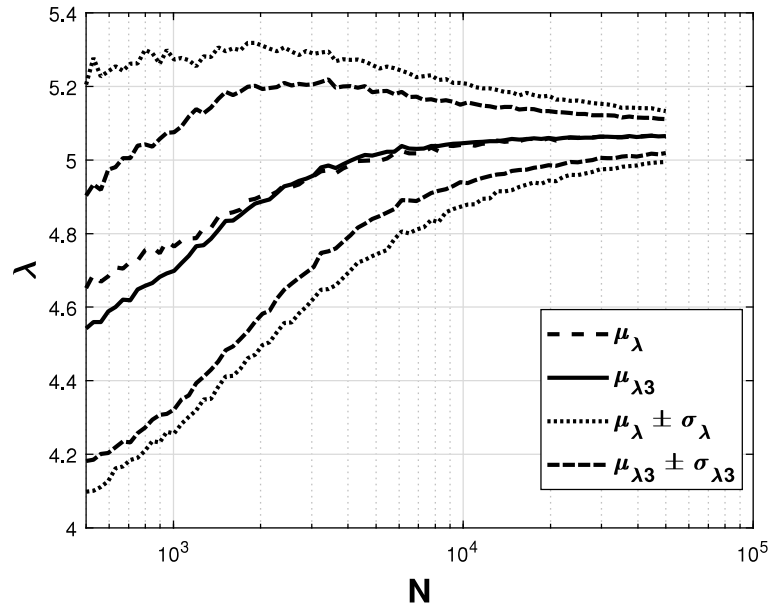
Konfigurowanie detektora GGD uszkodzeń rdzenia transformatora mocy

W dalszych badaniach związanych z detektorem GGD uszkodzeń rdzenia transformatora mocy *wyznaczono sposób zredukowania wariancji na wyjściu detektora oraz zaprojektowano procedurę mającą na celu przyspieszenie detekcji* [H12].

W części eksperymentalnej, w celu analizy działania algorytmu, określono wpływ liczebności próby losowej na wariancję wyniku detektora. Podobnie jak w poprzedniej pracy [H9], zbadano dziesięć różnych normalnie działających transformatorów, uszkodzony oraz idealny. Dla 12 transformatorów wyznaczono względne zmiany mocy drgań $P_r(f)$, wygenerowano odpowiadające im próbki losowe i do każdej sekwencji próbek losowych zastosowano metodę ML (3), aby znaleźć parametry p i λ , uzyskując 12 par (p, λ) .

Wykres, na rysunku 72 dla jednego z prawidłowo działających transformatorów, przedstawia stabilizację wartości średniej μ_p estymowanej wartości parametru p w miarę wzrostu rozmiaru losowej próby N . Liczba losowych próbek N była w zakresie od $5 \cdot 10^2$ do $5 \cdot 10^4$. Dla każdego podanego N test powtórzono $M = 2000$ i wyznaczono wartość średnią μ_p i odchylenie standardowe σ_p . Dodatkowo, na rysunku 72 można zobaczyć, że wraz ze wzrostem N odchylenie standardowe σ_p maleje. Podsumowując, w miarę jak rozmiar losowej próbki N wzrasta, wynik detektora p będzie średnio wynosił μ_p , a zmienność wyniku będzie się zmniejszać.

Podobne zachowanie można zaobserwować na wyjściu detektora dla parametru λ (rysunek 73). Dla tego samego transformatora wraz ze wzrostem rozmiaru losowej próby N , średnia wartość μ_λ estymowanej wartości parametru λ stabilizuje się na pewnym poziomie, a odchylenie standardowe σ_λ maleje. Co można podsumować ponownie, w miarę jak rozmiar losowej próbki N wzrasta, wyjście detektora λ będzie średnio przyjmować wartość μ_λ , a zmienność wyniku będzie się zmniejszać.



Rysunek 73: Wartość średnia μ_λ i odchylenie standardowe σ_λ estymowanej wartości λ w miarę wzrostu rozmiaru losowej próby N w porównaniu do wartości średniej $\mu_{\lambda 3}$ i odchylenia standardowego $\sigma_{\lambda 3}$ estymowanej wartości $\lambda 3$ dla metody ML i wybranego transformatora [H12]

Wniosek jest taki, że *w detektorze bazującym na metodzie ML należy wybrać możliwie największą liczbę próbek N* . Jednakże powoduje to wydłużenie czasu potrzebnego na znalezienie rozwiązania nieliniowego równania ML (3).

W tabeli 3 zebrano wyniki średniej estymowanej wartości μ_p parametru p i średniej estymowanej wartości μ_λ parametru λ dla $M = 2000$ powtórzeń i stosunkowo dużej losowej próby $N = 5 \cdot 10^4$. Wartości w tabeli dotyczą 10 transformatorów pracujących prawidłowo (Tr1-Tr10), jednego uszkodzonego (Def) i idealnego (Ideal).

W przypadku idealnego transformatora rozwiązanie równania ML (3) dla parametru kształtu p dąży do nieskończoności. Dlatego w przypadku braku zbieżności wykładnik p był ograniczony do 30. Rysunek 74 przedstawia funkcję ML zbliżającą się do 0 przy rosnących wartościach p . Jak wspomniano, odpowiada to przypadkowi, gdy $p \rightarrow \infty$ i funkcja gęstości GGD staje się rozkładem jednostajnym.

Tabela 4 przedstawia wyniki odchyłeń standardowych σ_p i σ_λ na wyjściu detektora dla estymowanych parametrów p i λ dla stosunkowo dużej losowej próby $N = 5 \cdot 10^4$ i $M = 2000$. Wariancje wyjściowe detektora, tj. σ_p^2 i σ_λ^2 , można zmniejszyć stosując następującą procedurę. Wyznacza się trzy razy wartości wyjściowe detektora (obliczenia można wykonywać równoległe) p_1 , p_2 i p_3 oraz λ_1 , λ_2 i λ_3 . Dla każdego zestawu, ostateczna wartość wyniku detektora p_3 (i λ_3) jest określana poprzez obliczenie mediany z trzech wartości p_1 , p_2 , p_3 (i λ_1 , λ_2 i λ_3). Na podstawie tabeli 4 można zauważyć, że odchylenia standardowe σ_{p3} i $\sigma_{\lambda 3}$ wartości wyjściowych detektora p_3 i λ_3 zmniejszyły się w porównaniu do σ_p i σ_λ .

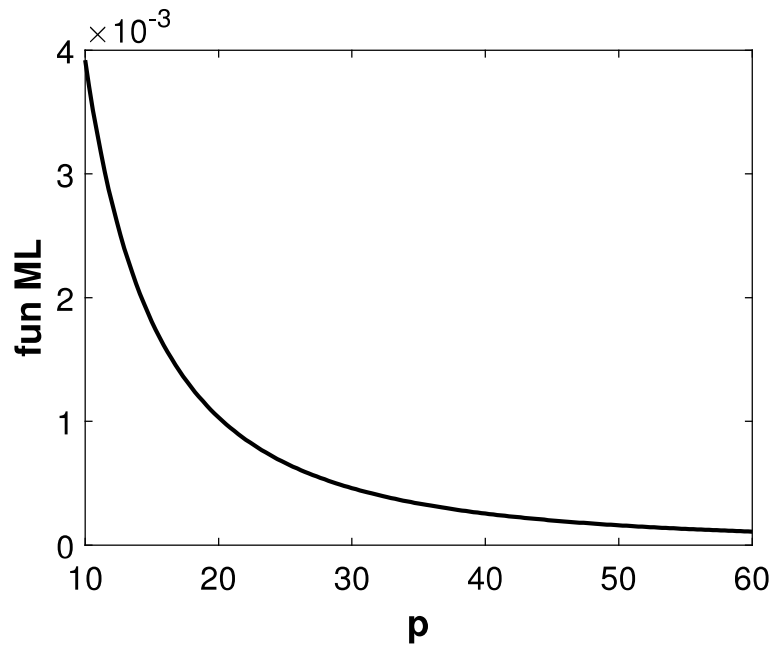
Biorąc pod uwagę wartości w tabeli 3, można zauważyć, że średnie wartości wyjścia detektora dla tych dwóch procedur są bliskie: $\mu_p \approx \mu_{p3}$ i $\mu_\lambda \approx \mu_{\lambda 3}$. Na rysunkach 72 i 73 można porównać, jak zmieniają się σ_{p3} i $\sigma_{\lambda 3}$ dla pary wyjść detektora o zmiennej wartości N w odniesieniu do σ_p i σ_λ . Należy zauważyć, że wyznaczone wartości p_3 i λ_3 charakteryzują się mniejszym odchyleniem standardowym.

Następnym wnioskiem jest to, że *w celu zmniejszenia wariancji wartości wyjściowych detektora, należy wyznaczyć kilka wartości wyjściowych detektora i obliczyć z nich medianę*. Niekorzystne w tym przypadku jest to, że potrzebne jest znalezienie większej liczby rozwiązań równania nieliniowego (3).

W celu zbadania rozdzielania obszarów na płaszczyźnie $p\lambda$ dla transformatorów działających prawidłowo i uszkodzonych, w zależności od rozmiaru losowej próby N , dla transformatorów pracujących normalnie wyznaczono otoczkę wypukłą (ang. convex hull). Otoczka wypukła została skonstruowana w taki sposób, że pokrywa punkty utworzone przez średnie wartości wyjścia detektora (μ_p, μ_λ). Otoczka wypukła została dodatkowo powiększona o odchylenia standardowe każdego punktu ($\mu_p \pm \sigma_p, \mu_\lambda \pm \sigma_\lambda$).

Tabela 3: Wartości średnie na wyjściu detektora estymowanych wartości p , $p3$, λ i $\lambda3$ dla 10 normalnie pracujących transformatorów (Tr1-Tr10), uszkodzonego (Def) i idealnego (Ideal) dla $N = 5 \cdot 10^4$ i metody ML [H12]

Transformator	μ_p	μ_{p3}	μ_λ	$\mu_{\lambda3}$
Tr1	1.673	1.673	4.417	4.415
Tr2	0.851	0.851	7.118	7.120
Tr3	0.852	0.851	7.115	7.119
Tr4	1.920	1.917	9.050	9.049
Tr5	0.633	0.633	13.269	13.261
Tr6	1.238	1.237	7.447	7.448
Tr7	0.637	0.637	10.220	10.216
Tr8	1.008	1.008	11.914	11.910
Tr9	1.949	1.944	5.064	5.065
Tr10	0.984	0.984	8.253	8.251
Ideal	30.000	30.000	8.009	8.009
Def	1.693	1.693	2.231	2.231



Rysunek 74: Funkcja ML (3) dla danych idealnego transformatora [H12]

Tabela 4: Odchylenia standardowe na wyjściu detektora estymowanych wartości p , $p3$, λ i $\lambda3$ dla 10 normalnie pracujących transformatorów (Tr1-Tr10), uszkodzonego (Def) i idealnego (Ideal) dla $N = 5 \cdot 10^4$ i metody ML [H12]

Transformer	σ_p	σ_{p3}	σ_λ	$\sigma_{\lambda3}$
Tr1	0.037	0.025	0.052	0.034
Tr2	0.007	0.004	0.098	0.065
Tr3	0.007	0.004	0.096	0.064
Tr4	0.086	0.059	0.165	0.114
Tr5	0.004	0.003	0.219	0.143
Tr6	0.020	0.013	0.104	0.069
Tr7	0.004	0.003	0.157	0.104
Tr8	0.013	0.009	0.175	0.118
Tr9	0.077	0.050	0.069	0.046
Tr10	0.008	0.005	0.090	0.059
Ideal	0.000	0.000	0.005	0.003
Def	0.022	0.015	0.022	0.015

Odchylenia standardowe zostały przedstawione jako elipsy wokół punktów (μ_p, μ_λ) dla różnych rozmiarów próbek: na rysunku 75 dla $N = 5 \cdot 10^2$ i na rysunku 76 dla $N = 5 \cdot 10^4$. Rysunek 75 pokazuje, że tak oznaczona otoczka wypukła (ch $5 \cdot 10^2$), obejmująca punkty prawidłowo działających transformatorów, jest oddzielona od obszaru uszkodzonego transformatora (+). Punkt uszkodzonego transformatora znajduje się najdalej na lewo na płaszczyźnie $p\lambda$ z najniższą wartością λ . Punkt idealnego transformatora dla $\mu_p = 30$ znajduje się nad obszarem i został pominięty na schemacie.

Na rysunku 76 dla stosunkowo dużej próby $N = 5 \cdot 10^4$ odchylenia standardowe σ_p i σ_λ zmniejszyły się, jak pokazano mniejszymi elipsami. Ponadto otoczka wypukła dla $N = 5 \cdot 10^4$ jest zawarta w otoczce wypukłej dla $N = 5 \cdot 10^2$. Co pokazuje, że zwiększenie rozmiaru losowej próby N zwiększa odległość między obszarem zawierającym punkty prawidłowo działających transformatorów, a obszarem, w którym jest punkt transformatora uszkodzonego.

Obliczenia można przyspieszyć poprzez zmniejszenie rozmiaru próbki N kosztem zwiększenia wariancji wartości wyjściowych detektora, ale wiąże się to również z nierozwiązywalnością metody ML. Rysunek 77 przedstawia wyniki estymacji parametru p dla wybranego transformatora dla małych wartości N w zakresie od 51 do 450 i liczbie powtórzeń $M = 5000$. Brak wartości na wykresie oznacza brak zbieżności metody ML.

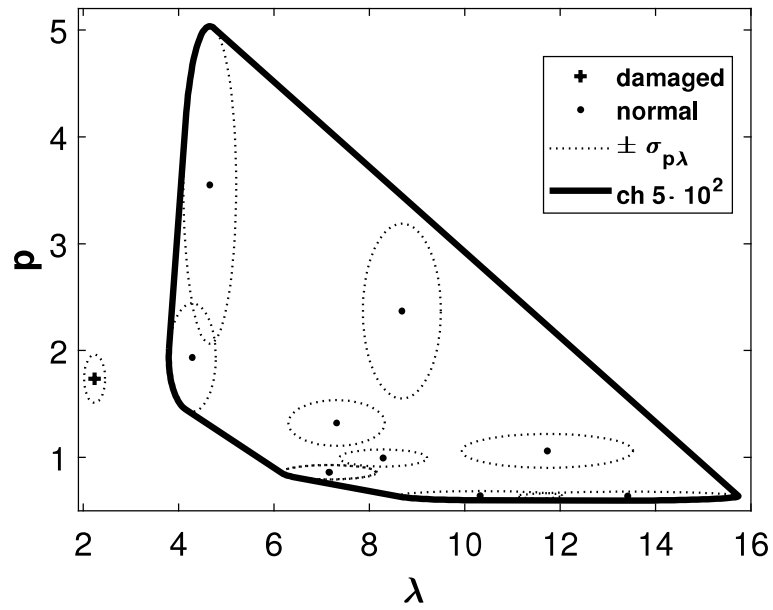
Stosując wcześniej opisaną procedurę, np. trzy obliczenia, pomijając przypadki braku rozwiązania metody ML i wyznaczając medianę z istniejących rozwiązań, można zwiększyć efektywność wyznaczania wartości wyjściowej detektora (ML3 na rysunek 77), lecz nie zawsze jest to możliwe. Trzykrotne powtórzenie również może nie dać rozwiązania. Tabela 5 zawiera średnie wartości parametrów p , $p3$, λ i $\lambda3$ dla rozważanych transformatorów dla $N = 51$ i $M = 5000$. Można zauważyć poprawę dla $p3$ i $\lambda3$, ale nadal brakuje rozwiązań.

Wykorzystując przybliżony szybki estymator (oznaczony ApxSm) z [H3] można uzyskać wyniki dla tak małych wartości N . Tabela 6 pokazuje, że wartości zostały wyznaczone dla wszystkich transformatorów. Ten estymator nie wymaga rozwiązywania równania nieliniowego, więc przybliżoną wartość można szybko wyznaczyć.

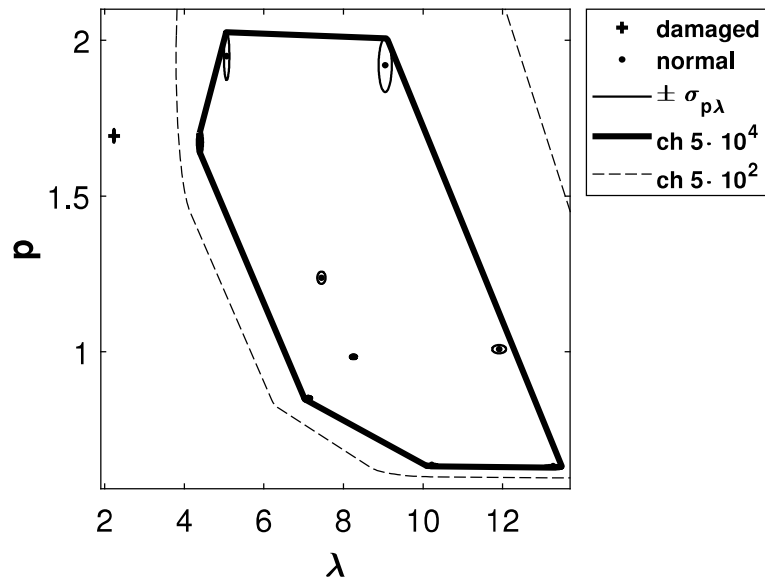
Również w przypadku tego estymatora możliwe jest zmniejszenie odchylenia standardowego wartości wynikowej poprzez obliczenie mediany (ApxSm3), np. z trzech oszacowanych wartości p . Rysunek 78 pokazuje, że odchylenie standardowe σ_{p3} wartości $p3$ jest mniejsze dla ApxSm3 niż odchylenie standardowe σ_p dla ApxSm dla zakresu N od 51 do 450 dla uszkodzonego transformatora.

Tabela 7 podsumowuje odchylenia standardowe σ_p , σ_{p3} , σ_λ i $\sigma_{\lambda3}$ dla ApxSm i ApxSm3, co prowadzi do wniosku, że wariancja na wyjściu detektora zmniejsza się dla ApxSm3 w porównaniu z ApxSm.

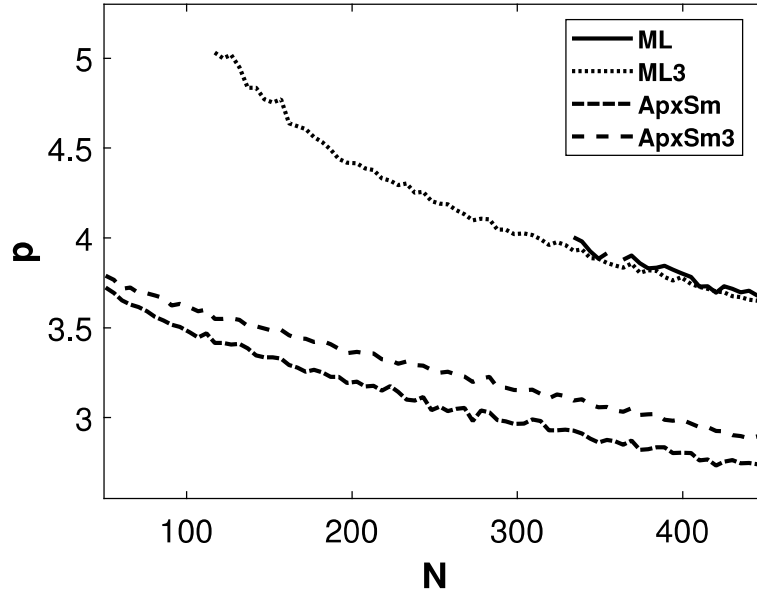
Podobnie jak poprzednio, na rysunku 79 obliczone średnie wartości na wyjściu detektora (μ_p, μ_λ) dla $N = 51$ z tabeli 6 zostały oznaczone na płaszczyźnie $p\lambda$ elipsami wokół tych punktów pokazującymi odchylenia standardowe $(\mu_p \pm \sigma_p, \mu_\lambda \pm \sigma_\lambda)$ z tabeli 7.



Rysunek 75: Otoczka wypukła ($ch\ 5 \cdot 10^2$) obejmująca punkty prawidłowo działających transformatorów (\cdot) jest oddzielona od obszaru uszkodzonego transformatora ($+$). Elipsy oznaczone ($\pm\sigma_{p\lambda}$) wokół punktów (μ_p, μ_λ) są utworzone przez odchylenia standardowe ($\mu_p \pm \sigma_p, \mu_\lambda \pm \sigma_\lambda$) dla $N = 5 \cdot 10^2$ [H12]



Rysunek 76: Otoczki wypukłe ($ch\ 5 \cdot 10^2$ dla $N = 5 \cdot 10^2$) i ($ch\ 5 \cdot 10^4$ dla $N = 5 \cdot 10^4$) obejmujące punkty prawidłowo działających transformatorów (\cdot) są oddzielone od obszaru uszkodzonego transformatora ($+$). Elipsy oznaczone ($\pm\sigma_{p\lambda}$) wokół punktów (μ_p, μ_λ) są utworzone przez odchylenia standardowe ($\mu_p \pm \sigma_p, \mu_\lambda \pm \sigma_\lambda$) [H12]



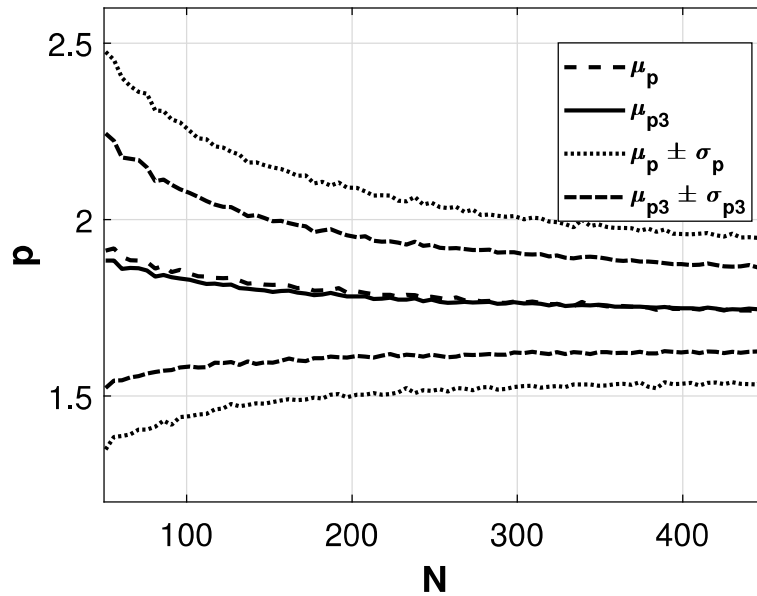
Rysunek 77: Wartości średnie μ_p parametru p dla metody ML; średnie wartości μ_{p3} parametru $p3$ dla metody ML3; wartości średnie μ_p parametru p dla metody ApxSm; średnie wartości μ_{p3} parametru $p3$ dla metody ApxSm3; dla małych wartości N [H12]

Tabela 5: Wartości średnie na wyjściu detektora wartości estymowanych p , $p3$, λ i $\lambda3$ dla 10 transformatorów pracujących normalnie (Tr1-Tr10), uszkodzonego (Def) i idealnego (Ideal) dla $N = 51$ i metody ML. (-) brak rozwiązania [H12]

Transformer	μ_p	μ_{p3}	μ_λ	$\mu_{\lambda3}$
Tr1	-	3.364	-	-
Tr2	-	0.933	-	6.910
Tr3	0.955	0.930	7.580	6.893
Tr4	-	-	-	-
Tr5	0.686	0.672	14.752	13.032
Tr6	-	1.640	-	6.629
Tr7	0.703	0.676	11.217	10.079
Tr8	-	1.418	-	10.198
Tr9	-	-	-	-
Tr10	1.104	1.068	8.457	8.011
Ideal	28.329	29.498	8.101	8.060
Def	-	1.978	-	2.290

Tabela 6: Wartości średnie na wyjściu detektora wartości estymowanych p , p_3 , λ i λ_3 dla 10 transformatorów pracujących normalnie (Tr1-Tr10), uszkodzonego (Def) i idealnego (Ideal) dla $N = 51$ i estymatora ApxSm [H12]

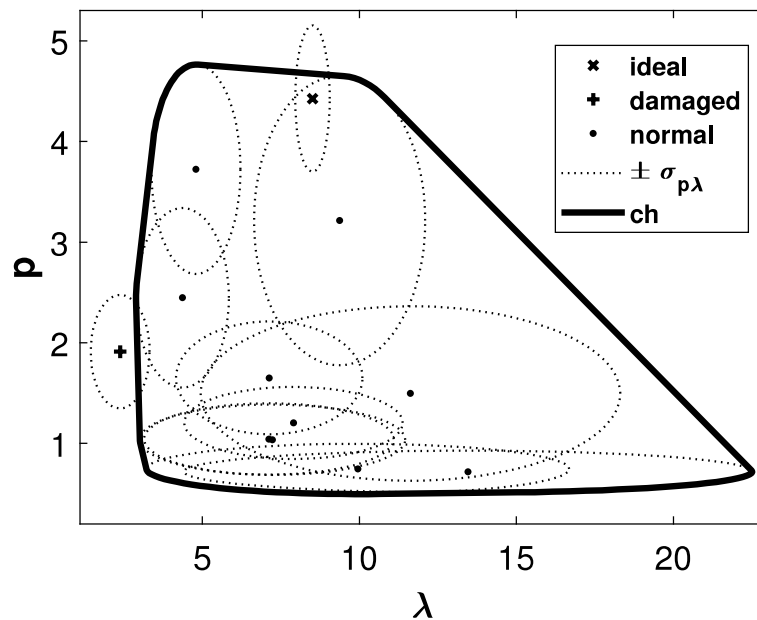
Transformer	μ_p	μ_{p_3}	μ_λ	μ_{λ_3}
Tr1	2.447	2.458	4.366	4.098
Tr2	1.044	0.999	7.115	6.552
Tr3	1.037	0.997	7.230	6.543
Tr4	3.214	3.228	9.371	8.834
Tr5	0.719	0.690	13.459	12.099
Tr6	1.651	1.618	7.128	6.613
Tr7	0.747	0.704	9.952	9.080
Tr8	1.496	1.330	11.625	10.589
Tr9	3.723	3.789	4.793	4.590
Tr10	1.203	1.174	7.901	7.406
Ideal	4.425	4.447	8.505	8.451
Def	1.912	1.884	2.380	2.226



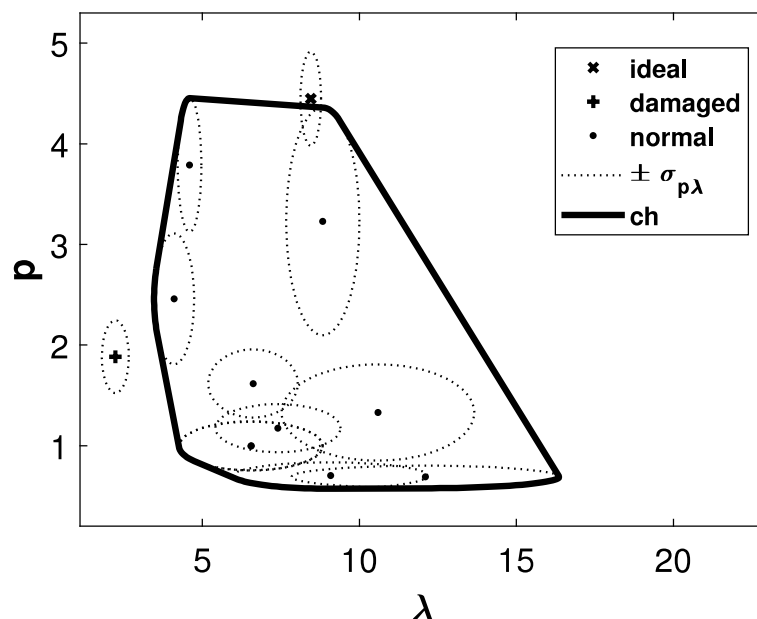
Rysunek 78: Wartość średnia μ_p i odchylenie standardowe σ_p estymowanej wartości p w miarę wzrostu rozmiaru losowej próby N w porównaniu do wartości średniej μ_{p_3} i odchylenia standardowego σ_{p_3} estymowanej wartości p_3 dla estymatora ApxSm i wybranego transformatora [H12]

Tabela 7: Odchylenia standardowe na wyjściu detektora estymowanych wartości p , p_3 , λ i λ_3 dla 10 normalnie pracujących transformatorów (Tr1-Tr10), uszkodzonego (Def) i idealnego (Ideal) dla $N = 51$ i estymatora ApxSm [H12]

Transformer	σ_p	σ_{p_3}	σ_λ	σ_{λ_3}
Tr1	0.891	0.650	1.477	0.638
Tr2	0.354	0.243	3.974	2.273
Tr3	0.349	0.242	4.228	2.290
Tr4	1.437	1.131	2.725	1.164
Tr5	0.209	0.112	9.048	4.259
Tr6	0.560	0.339	2.969	1.426
Tr7	0.250	0.131	6.729	3.084
Tr8	0.867	0.478	6.683	3.071
Tr9	1.041	0.664	1.418	0.376
Tr10	0.358	0.239	3.479	1.990
Ideal	0.726	0.466	0.548	0.328
Def	0.563	0.361	0.936	0.429



Rysunek 79: Otoczka wypukła (ch) obejmująca punkty prawidłowo działających transformatorów (·) zachodząca na obszar uszkodzonego transformatora (+). Elipsy oznaczone $(\pm\sigma_{p\lambda})$ wokół punktów (μ_p, μ_λ) utworzone są przez odchylenia standardowe $(\mu_p \pm \sigma_p, \mu_\lambda \pm \sigma_\lambda)$ dla $N = 51$ i metody ApxSm. (x) - transformator idealny [H12]



Rysunek 80: Otoczka wypukła (ch) obejmująca punkty prawidłowo działających transformatorów (•) jest oddzielona od obszaru uszkodzonego transformatora (+). Elipsy oznaczone ($\pm\sigma_{p\lambda}$) wokół punktów ($\mu_{p3}, \mu_{\lambda3}$) utworzone są przez odchylenia standardowe ($\mu_{p3} \pm \sigma_{p3}, \mu_{\lambda3} \pm \sigma_{\lambda3}$) dla $N = 51$ i metody ApxSm3. (x) - idealny transformator [H12]

Wokół tych obszarów zbudowano otoczkę wypukłą dla punktów normalnie działających transformatorów. Można zauważyć, że obszar uszkodzonego transformatora nachodzi na otoczkę wypukłą normalnie pracujących transformatorów. Oznacza to, że istnieje prawdopodobieństwo, iż punkty transformatorów znajdujących się na granicy tego obszaru zostaną zaliczone do niewłaściwego obszaru. Oznacza to również, że dla pojedynczej próby wariancja tego estymatora jest zbyt duża. Jeżeli zwiększy się liczbę prób, np. trzykrotnie, jak w przypadku ApxSm3, odchylenie standardowe wartości wyjściowych detektora zmniejszy się. Przypadek ten pokazano na rysunku 80. Zostały tam przedstawione wartości średnie na wyjściu detektora ($\mu_{p3}, \mu_{\lambda3}$), a także elipsy wokół tych punktów pokazujące odchylenia standardowe ($\mu_{p3} \pm \sigma_{p3}, \mu_{\lambda3} \pm \sigma_{\lambda3}$). Obszar obejmujący punkty prawidłowo działających transformatorów zmniejszył się, a odległość od obszaru uszkodzonego transformatora zwiększyła się. Dlatego w przypadku estymatora ApxSm należy przeprowadzić kilka prób, a medianę przyjmując jako wynik detektora.

Podsumowując, również w przypadku estymatora ApxSm, w celu zmniejszenia wariancji wartości wyjściowych detektora, należy wyznaczyć nie trzy, a kilka wartości wyjściowych detektora i na ich podstawie obliczyć medianę jako wartość wynikową.

Estymator ApxSm nie został zaprojektowany dla dużych wartości p , więc w przypadku idealnego transformatora parametr kształtu p został przybliżony wartością około 4.4.

Na koniec, zaleca się najpierw szybkie określenie wartości p za pomocą szybkiego estymatora ApxSm3, a następnie wykorzystanie tej wartości p jako punktu wyjścia dla algorytmu ML w celu przyspieszenia zbieżności.

Podsumowując, dla transformatorów o jednakowej mocy 16 MVA o różnym okresie użytkowania i stopniu zużycia:

- zbadano wpływ wariancji estymatora największej wiarygodności rozkładu GGD na parę (λ, p) stanowiącą wyjście detektora uszkodzeń rdzenia transformatora mocy, gdzie zmniejszenie wartości wariancji uzyskano poprzez zwiększenie liczby losowych próbek detektora;
- zmniejszenie wariancji wartości wyjściowych można uzyskać również poprzez powtórzenie obliczeń np. trzykrotnie i określenie mediany jako wartości wynikowej;

- przyspieszenie obliczeń można osiągnąć stosując przybliżony szybki estymator [H3] GGD, ale w celu zmniejszenia wariancji wartości wyjściowych konieczne jest wielokrotne powtórzenie obliczeń i określenie mediany jako wartości wyjściowej;
- określono obszar obejmujący punkty prawidłowo działających transformatorów, uwzględniając odchylenie standardowe oszacowanych wartości λ i p , który wyraźnie oddziela się od obszaru uszkodzonego transformatora.

Obrazowanie na płaszczyźnie (λ, p) z wykorzystaniem narzędzia bazującego na GGD do wykrywania potencjalnie rozwijających się defektów rdzenia otwiera nowy obszar do dalszych badań detekcji uszkodzeń rdzenia transformatora mocy.

4.3.10 Wykorzystanie uogólnionego rozkładu Gaussa w binaryzacji obrazów dokumentów

Jednym z najważniejszych etapów wstępnego przetwarzania obrazów dokumentów poddawanych dalszemu rozpoznawaniu tekstu jest ich binaryzacja. W pracy [H7] zaprezentowano *nowe podejście binaryzacji wykorzystujące GGD z ukierunkowaniem na obrazy, zwłaszcza zdegradowanych dokumentów historycznych*. GGD został wykorzystany do poprawy jakości danych wejściowych dla dalszego rozpoznawania tekstu. W celu przyspieszenia obliczeń zredukowano dane wejściowe metodą Monte Carlo dla algorytmu bazującego na GGD. Na potrzeby weryfikacji zaproponowanego rozwiązania wykorzystany został zbiór obrazów DIBCO [142]. We wstępnym przetwarzaniu obrazów ich histogram był aproksymowany przez GGD. Parametr lokalizacji μ rozkładu GGD został wykorzystany do usunięcia częściowych informacji związanych z obecnością zniekształceń. Następnie można było przeprowadzić progowanie jedną z typowych metod, np. klasyczną globalną binaryzacją Otsu [143]. Ponieważ obliczenie parametrów GGD dla histogramu otrzymanego dla całego obrazu jest stosunkowo powolne, można było znacznie zmniejszyć obciążenie obliczeniowe stosując uproszczony histogram obliczony dla ograniczonej liczby pikseli. Aby zachować właściwości statystyczne analizowanego obrazu, losowo wybrane lokalizacje pikseli były równomiernie rozmieszczone na płaszczyźnie obrazu, dlatego też w procedurze Monte Carlo zastosowano generator liczb losowych o rozkładzie równomiernym. Dla małych rozmiarów prób metody Monte Carlo estymowane parametry rozkładu GGD posiadały dużą wariancję. Dla pewnej granicznej wielkości próbki wyniki się stabilizowały. Ten graniczny rozmiar próbki był mniejszy od liczby wszystkich pikseli.

Wstępnie wyznaczany zakres jasności obrazu również bazował na rozkładzie GGD i był wyznaczany dla małego rozmiaru próby metody Monte Carlo $N = 100$. Dla tak małej próby konieczne trzeba było skorzystać z metody estymacji GGD dla małej liczebności próby [H3].

Opracowana wspólnie procedura, wykorzystująca przybliżenie histogramu przez GGD i metodę Monte Carlo do wstępnego przetwarzania obrazu, prowadziła do polepszenia wyników binaryzacji dla metod progowania Otsu i Bradley'a [144]. W wyniku wspólnych badań powstał algorytm binaryzacji obrazów zdegradowanych dokumentów na bazie modelu GGD [H7].

W dalszych pracach nad procesem binaryzacji z wykorzystaniem GGD została wspólnie opracowana ulepszona binaryzacja dwuetapowa obrazów zdegradowanych dokumentów [H8]. Baza obrazów testowych została rozszerzona o obrazy zawarte w zbiorze danych Bickley Diary [145], zawierającym 92 kserokopie poszczególnych stron dziennika spisanego ok. 100 lat temu przez żonę jednego z pierwszych misjonarzy w Malesji – biskupa George'a H. Bickley'a. Ponieważ zniekształcenia w tym zbiorze danych są związane nie tylko z ogólnym szumem powodowanym przez kserowanie, ale także odbarwieniami i zaciekami, a także różnicami w kontraście atramentu w różnych latach, można go uznać za jeszcze bardziej wymagający w porównaniu do zestawów obrazów DIBCO.

Do algorytmu ulepszonej binaryzacji dwuetapowej obrazów zdegradowanych dokumentów zostały wprowadzone dodatkowe dane pochodzące z modelu mieszaniny Gaussa (GMM). GMM składa się z rozkładów Gaussa określonych przez ich położenie μ i odchylenia standardowe σ oraz dodatkowo wektor proporcji mieszania. Ze względu na główny cel badań, związany z binaryzacją obrazu, rozważane było zastosowanie dwóch rozkładów Gaussa, ponieważ założono podział na tylko dwie klasy pikseli. Innymi słowy, założono, że w obrazie występują tylko dwie grupy składające się z pikseli reprezentujących

odpowiednio tekst i tło, a w idealnym przypadku każda grupa reprezentowana jest przez pojedynczy składowy rozkład Gaussa.

W wyniku wspólnych badań powstał stosunkowo szybki i prosty, nowatorski dwuetapowy algorytm z wykorzystaniem progowania wstępnego, oparty na modelowaniu uproszczonego histogramu obrazu przy użyciu modelu mieszanki Gaussa i metody Monte Carlo [H8].

W dalszych badaniach nad binaryzacją opracowane wspólnie algorytmy zostały zastosowane do obrazów zdegradowanych starożytnych papirusów z DIBCO 2019 (track B) [146]. Ścieżka B dotyczy zbioru danych papirusów zawierających 10 różnych wizerunków starożytnych papirusów w różnych stanach zachowania, spisanych w różnych wiekach antycznych przy użyciu różnych rodzajów jakości papirusów, atramentu i stylu pisma ręcznego. Nie mają one jednorodnych właściwości (oświetlenia, rozdzielczości czy materiału) i są obciążone zarówno problemami konserwatorskimi, jak i renowacyjnymi (dziury, wytarty tusz, kurz, źle umieszczone włókna, itp.). Tak więc publikacja [H10] ma charakter uzupełniający wcześniejsze prace jej współautorów. Nowością w stosunku do tej pracy jest bardziej szczegółowa analiza obrazów wymagających i niejednorodnych dokumentów cyfrowych.

4.3.11 Podsumowanie osiągnięcia naukowego

Wykazany i omówiony w autoreferacie cykl 13 publikacji przedstawia wyniki moich prac badawczych, których celem była estymacja parametrów uogólnionego rozkładu Gaussa oraz zastosowanie uogólnionego rozkładu Gaussa w przetwarzaniu sygnałów i obrazów.

Do najważniejszych osiągniętych wyników badań przedstawionych w publikacjach zaliczonych do jednotematycznego cyklu, stanowiących wkład w rozwój dyscypliny automatyka, elektronika, elektrotechnika i technologie kosmiczne, zaliczam:

1. Opracowanie metody rekursywnej filtracji wielomianowej medianowej ważonej (RPWM), która w przypadku odpowiedniego doboru wag filtru pozwala w zdecydowanie lepszym stopniu odtwarzać odpowiedź modelu przy zaburzeniu sygnału wejściowego sygnałem o ogólnym rozkładzie Gaussa, w stosunku do podobnych istniejących modeli (Punkt 4.3.2) [H1].
2. Opracowanie algorytmu adaptacyjnej aktualizacji wag rekursywnego filtru wielomianowego medianowego ważonego (RPWM) (Punkt 4.3.2) [H1].
3. Opracowanie estymatora parametru kształtu rozkładu GGD dla małej liczebności próby, będący modyfikacją metody momentów, gdzie przez dobór rzędów momentów i rozwinięcia w szereg można poprawić zbieżność metody dla małych prób, a także zmniejszyć względny błąd średniokwadratowy (Punkt 4.3.3) [H2].
4. Opracowanie aproksymowanego szybkiego estymator parametru kształtu uogólnionego rozkładu Gaussa dla małej liczebności próby (równanie (45)), który nie wymaga obszernej tabeli z wartościami, numerycznego poszukiwania rozwiązania równania nieliniowego, ani nie wymaga przeszukiwania tablicy oraz posiada rozwiązanie w przypadku, kiedy inne estymatory nie posiadają rozwiązania. Opracowanie również wersji tego estymatora (równanie (46)) dla względnie większego rozmiaru próby około 1000 – 2000 elementów (Punkt 4.3.3) [H3].
5. Opracowanie przypadku szczególnego rozkładu GGD z parametrem kształtu $p = 1/3$ w celu ułatwienia analizy sygnałów o impulsowym rozkładzie. Została podana funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta dla zmiennej losowej ciągłej oraz estymator największej wiarygodności dla tego rozkładu. Został podany rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej dyskretnej oraz estymator największej wiarygodności dla tego rozkładu, który wymaga estymacji tylko jednego parametru λ . Wyznaczenie równania rekonstrukcji skwantowanych współczynników względem środka ciężkości w postaci jawnej dla modelu GGD $p = 1/3$ (Punkt 4.3.4) [H4].
6. Opracowanie podklasy przypadków szczególnych $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$ rozkładu GGD w celu ułatwienia analizy sygnałów o impulsowym rozkładzie. Została podana funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta dla zmiennej losowej ciągłej oraz estymator największej wiarygodności dla tej podklasy rozkładów. Został podany rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej

losowej dyskretnej oraz estymator największej wiarygodności dla tej podklasy rozkładów, który wymaga estymacji tylko jednego parametru λ . Wyznaczenie równania rekonstrukcji skwantowanych współczynników względem środka ciężkości w postaci jawnej dla modelu GGD $p = 1/m$, $m = 2, 3, \dots$ (Punkt 4.3.5) [H6].

7. Opracowanie alternatywnej postaci znormalizowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa 3D GGD (równanie (84)) zapewniając normalizację momentu drugiego rzędu (Punkt 4.3.6) [H5].
8. Opracowanie alternatywnej postaci znormalizowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa 3D GGD z generowaniem punktów równomiernie rozmieszczonymi na sferze (równanie (88)) zapewniając normalizację momentu drugiego rzędu (Punkt 4.3.6) [H5].
9. Opracowanie alternatywnej postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej przyjmującej wartości kwaternionu rozszerzonego QGGD (równanie (105)) (Punkt 4.3.6) [H5].
10. Opracowanie procedury generowania zmiennej losowej o wartościach kwaternionu rozszerzonego o rozkładzie QGGD (Punkt 4.3.6) [H5].
11. Opracowanie postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej przyjmującej wartości kwaternionu czystego rozszerzonego QGGD (równanie (128)) (Punkt 4.3.7) [H11].
12. Opracowanie procedury generowania zmiennej losowej o wartościach kwaternionu czystego rozszerzonego o rozkładzie QGGD (Punkt 4.3.7) [H11].
13. Opracowanie alternatywnej postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej przyjmującej wartości kwaternionu pełnego rozszerzonego QGGD (równanie (137)) (Punkt 4.3.8) [H13].
14. Opracowanie postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej przyjmującej wartości kwaternionu \mathbb{H} -właściwego QGGD (równanie (143)) (Punkt 4.3.8) [H13].
15. Opracowanie estymatorów największej wiarygodności uogólnionego rozkładu Gaussa dla zmiennej losowej przyjmującej wartości kwaternionu \mathbb{H} -właściwego (równania (144) i (145)) (Punkt 4.3.8) [H13].
16. Opracowanie statystycznego modelu detektora obiektywnej metody detekcji wad konstrukcji mechanicznej rdzenia transformatora energetycznego bazującej na uogólnionym rozkładzie Gaussa (Punkt 4.3.9) [H9].
17. Opracowanie procedury zmniejszenia wariancji wartości wyjściowych detektora uszkodzeń rdzenia transformatora mocy oraz przyspieszenia procedury wyznaczania wartości wyjściowych tego detektora (Punkt 4.3.9) [H12].
18. Opracowanie procedury wyznaczania obszaru obejmującego punkty prawidłowo działających transformatorów, uwzględniając odchylenie standardowe oszacowanych wartości λ i p , który wyraźnie oddziela się od obszaru uszkodzonego transformatora (Punkt 4.3.9) [H12].
19. Opracowanie modeli bazujących na GGD i GMM do wstępnego wyznaczania zestawów progów wykorzystywanych w binaryzacji zdjęć dokumentów cyfrowych, szczególnie zdegradowanych dokumentów historycznych (Punkt 4.3.10) [H7, H8, H10].

Prowadzone badania dotyczyły ważnego zagadnienia z zakresu dyscypliny naukowej automatyka, elektronika, elektrotechnika i technologie kosmiczne, a w szczególności modelowania i przetwarzania sygnałów. Osiągnięte wyniki otwierają nowe obszary badań oraz dostarczają nowych narzędzi do statystycznego przetwarzania sygnałów i obrazów.

4.3.12 Dodatkowe prace związane z uogólnionym rozkładem Gaussa

Po doktoracie w wyniku badań nad uogólnionym rozkładem Gaussa *opracowano metodę estymacji parametru dyskretnego rozkładu Laplace'a (będącego szczególnym przypadkiem GGD) przez wprowadzenie zmiennego rzędu momentu, dzięki któremu można poprawić jakość rekonstrukcji obrazu w przypadku kompresji bazującej na współczynnikach DCT (JPEG, MPEG) dla składowych Y, U, V i przyjętego kryterium PSNR* [147].

Dyskretny estymator rozkładu Laplace'a ze zmiennym rzędem momentu

Rozkład współczynników DCT obrazu można modelować za pomocą rozkładu GGD. Zakładając, że rozkład jest wycentrowany w punkcie zero, to GGD wymaga estymacji dwóch parametrów. Zakładając rozkład Laplace'a, jako szczególny przypadek rozkładu GGD, wymagana jest estymacja tylko jednego parametru.

Joshi i Fischer [62] oraz Müller [8] modelowali współczynniki AC DCT obrazów i stwierdzili, że dla obrazu „Baboon” mogą być zamodelowane za pomocą rozkładu Laplace'a. Skwantyfikowane wartości współczynników DCT dostępne dla dekodera, wykorzystujące metodę największej wiarygodności, zostały wykorzystane do modelowania gęstości rozkładu współczynników DCT za pomocą rozkładu Laplace'a przez Rice'a i Rabbani [81]. Natomiast współczynniki DCT przestrzeni barw zostały zamodelowane rozkładem Laplace'a przez Smoota i Rowe'a [148].

W pracach przed doktoratem zostały opracowane estymatory parametru λ dyskretnego rozkładu Laplace'a z wykorzystaniem absolutnego momentu pierwszego rzędu oraz wariancji na podstawie $E[|X|]$ i $E[X^2]$ [149].

Dodatkowo przed doktoratem został opracowany rozkład prawdopodobieństwa GGD $p = 0.5$ dla zmiennej losowej dyskretniej, estymator największej wiarygodności dyskretnego rozkładu GGD $p = 0.5$ oraz zmodyfikowana rekonstrukcja względem środka ciężkości przedziału [66]. W pracy zostało pokazane, że zmodyfikowana rekonstrukcja obrazu w kompresji stratnej może prowadzić do poprawienia jakości rekonstruowanego obrazu w przypadku kryterium PSNR (szczytowy stosunek sygnału do szumu, ang. peak signal-to-noise ratio).

Proces kwantyzacji współczynników DCT opisany w standardach MPEG i JPEG redukuje informacje przenoszone przez współczynniki DCT i jest opisany następującym równaniem

$$n_{i,j} = \text{round} \left(\frac{F_{i,j}}{Q_{i,j}} \right), \quad (165)$$

gdzie $F_{i,j}$ reprezentuje współczynnik DCT znajdujący się w dwuwymiarowym bloku o rozmiarze, np. 8×8 o indeksach (i, j) , $Q_{i,j}$ wskazuje wartość kwantyzacji (współczynnik kwantyzacji), a $n_{i,j}$ to skwantowana wartość gotowa do zakodowania i wysłania do dekodera.

W rekonstrukcji JPEG i MPEG współczynniki dostępne dla dekodera są rekonstruowane do środka przedziału. W procesie dekwantyzacji wartość zrekonstruowana wynosi

$$F_{i,j}^q = n_{i,j} \cdot Q_{i,j}, \quad (166)$$

gdzie $F_{i,j}^q$ reprezentuje zrekonstruowany współczynnik DCT.

Proces ten prowadzi do stratnej kompresji obrazu i rozkład współczynników DCT nie da się opisać rozkładem ciągłym.

Gdy koder stosuje kwantyzację, informacje są zredukowane i dla dekodera dostępne są tylko skwantowane współczynniki. Zatem modelowanie rozkładu współczynników powinno odbywać się za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej dyskretniej. Dysponując tym modelem dystrybucji dyskretniej, zrekonstruowane współczynniki można modyfikować, na przykład, za pomocą rekonstrukcji względem środka ciężkości, aby zmniejszyć utratę sygnału.

Dyskretny rozkład Laplace'a jest otrzymywany przez całkowanie ciągłego w przedziale kwantyzacji [81]

$$P_n = \int_{(n-0.5) \cdot Q}^{(n+0.5) \cdot Q} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx, \quad (167)$$

gdzie n wskazuje indeks przedziału, a Q reprezentuje szerokość przedziału kwantyzacji. Zatem współczynniki DCT dostępne po stronie dekodera mogą być modelowane przez dyskretny rozkład Laplace'a [149] w postaci

$$P_n = \begin{cases} 1 - e^{-0.5 \cdot \lambda \cdot Q} & n = 0 \\ e^{-\lambda \cdot |n| \cdot Q} \cdot \sinh(0.5 \cdot \lambda \cdot Q) & n \neq 0 \end{cases} \quad (168)$$

Opublikowano kilka metod estymacji parametru λ dla obserwowanych zmiennych dyskretnych. Najprostszym podejściem [81, 150] jest estymacja parametru λ z wartości otrzymanych przez dekoderek

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{V}}, \quad (169)$$

gdzie V jest wariancją zdekwantyzowanych współczynników zrekonstruowanych do środka przedziału.

Estymator największej wiarygodności dla dyskretnych współczynników DCT podano w [81]:

$$\lambda_{ML}^q = -\frac{2}{Q} \cdot \ln(\gamma), \quad (170)$$

$$\gamma = \frac{-N_0 \cdot Q}{2 \cdot N \cdot Q + 4 \cdot E_1} + \frac{\sqrt{N_0^2 \cdot Q^2 - (2 \cdot N_1 - 4 \cdot E_1) \cdot (2 \cdot N \cdot Q + 4 \cdot E_1)}}{2 \cdot N \cdot Q + 4 \cdot E_1}, \quad (171)$$

gdzie

$$E_1 = \sum_{k=1}^N |x_k| \quad (172)$$

i gdzie N to całkowita liczba obserwacji, N_0 to liczba obserwacji równa zero, a N_1 to liczba obserwacji, które są niezerowe.

Kolejne dwie metody opracowane przed doktoratem [149] bazują na absolutnym momencie pierwszego rzędu oraz wariancji. Estymacja parametru λ uzyskana z $E[X^2]$ ma następującą postać [149]

$$\lambda_{E[X^2]}^q = \frac{2}{Q} \cdot \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right), \quad (173)$$

gdzie

$$t = \frac{Q^2}{4 \cdot E_2} + \sqrt{\left(\frac{Q^2}{4 \cdot E_2}\right)^2 + 1}, \quad (174)$$

$$E_2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i)^2. \quad (175)$$

Z $E[|X|]$ otrzymano następującą estymację parametru λ [149]

$$\lambda_{E[|X|]}^q = \frac{2}{Q} \cdot \ln\left(\frac{Q}{2 \cdot E_1} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2 \cdot E_1}\right)^2 + 1}\right), \quad (176)$$

gdzie

$$E_1 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N |x_i|. \quad (177)$$

Wprowadzony w [147] nowy dyskretny estymator rozkładu Laplace'a ze zmiennym rzędem momentu wykorzystuje absolutny moment rzędu m rozkładu GGD (5). Podstawiając równanie (2) do równania (5) daje unikalną relację między drugim a momentem bezwzględnym rzędu m -tego dla GGD [67]

$$E_2 = \left[\frac{E_m \Gamma\left(\frac{3}{p}\right)^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^{m/2-1}} \right]^{2/m}. \quad (178)$$

Estymator Laplace'a ze zmiennym rzędem momentu dla zmiennej losowej dyskretnej otrzymuje się bazując na równaniu (178) dla przypadku Laplace'a $p = 1$ i korzystając z (6). Estymacja parametru λ wynosi zatem [147]

$$\lambda_{E[|X|^m]}^q = \frac{2}{Q} \cdot \ln \left(t + \sqrt{t^2 - 1} \right), \quad (179)$$

gdzie

$$t = \frac{Q^2}{4 \cdot E_2} + \sqrt{\left(\frac{Q^2}{4 \cdot E_2} \right)^2 + 1}, \quad (180)$$

$$E_2 = 2 \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^N |x_i|^m}{N \cdot \Gamma(m+1)} \right]^{2/m} \quad (181)$$

i m przyjmuje wartości rzeczywiste.

Zamiast stosować rekonstrukcję współczynników DCT za pomocą standardowego wzoru (166) można wyznaczyć zmodyfikowaną wartość rekonstrukcji współczynników DCT na podstawie przyjętego modelu. W oparciu o obserwację, że współczynniki DCT mają szczyt w zerze i maleją wykładniczo, Ahumada i Horng [151] dokonali korekty zrekonstruowanych współczynników. Przy założeniu, że współczynniki DCT posiadają rozkład Laplace'a zmodyfikowane wartości można wyznaczyć na podstawie wzoru [81, 149]

$$x_n = Q \cdot n - \text{sgn}(n) \cdot \left[\frac{Q}{2} \cdot \text{ctgh} \left(\lambda \cdot \frac{Q}{2} \right) - \frac{1}{\lambda} \right]. \quad (182)$$

Zmodyfikowana rekonstrukcja obrazu z wykorzystaniem dyskretnego estymatora rozkładu Laplace'a ze zmiennym rzędem momentu

W celu sprawdzenia płynących korzyści z zastosowania nowego estymatora wykorzystane zostały wszystkie nieprzetworzone obrazy z bazy [152]. Składowe RGB obrazów zostały przekształcone do przestrzeni kolorów YUV zgodnie z następującym równaniem:

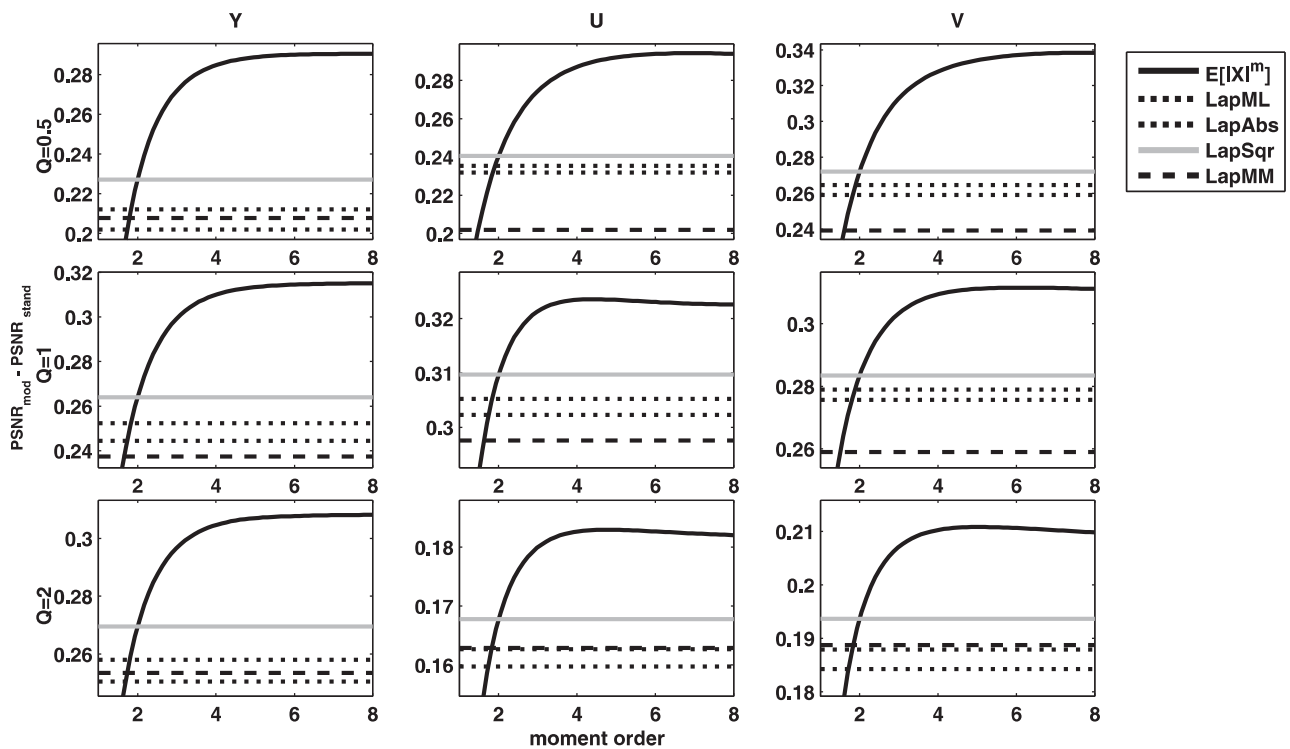
$$\begin{aligned} Y &= 0.299 \cdot R + 0.587 \cdot G + 0.114 \cdot B \\ U &= 0.436 \cdot (B - Y) / (1 - 0.114) \\ V &= 0.615 \cdot (R - Y) / (1 - 0.299) \end{aligned} \quad (183)$$

Przeprowadzono dwuwymiarową transformatę DCT na blokach 8×8 . Współczynniki DCT zostały zebrane ze wszystkich bloków 8×8 dla ustalonej pozycji w bloku tworząc 64 zestawy. Rozkład Laplace'a nie dotyczy zbioru na pozycji (0,0). Każdy komponent Y, U i V rozpatrywany był oddzielnie. Porównane zostały następujące metody: $E[|X|^m]$ (równanie (179)), $LapML$ (równanie (170)), $LapAbs$ (równanie (176)), $LapSqr$ (równanie (173)) i $LapMM$ (równanie (169)). Dla każdej metody zrekonstruowany obraz został utworzony zgodnie z równaniem (182). Rozważane były trzy współczynniki skalowania tabel kwantyzacji [7] $Q = 0.5$, $Q = 1$ i $Q = 2$, co odpowiada jakości kompresji. Rząd momentu zmieniał się w zakresie $m \in \langle 1, 8 \rangle$.

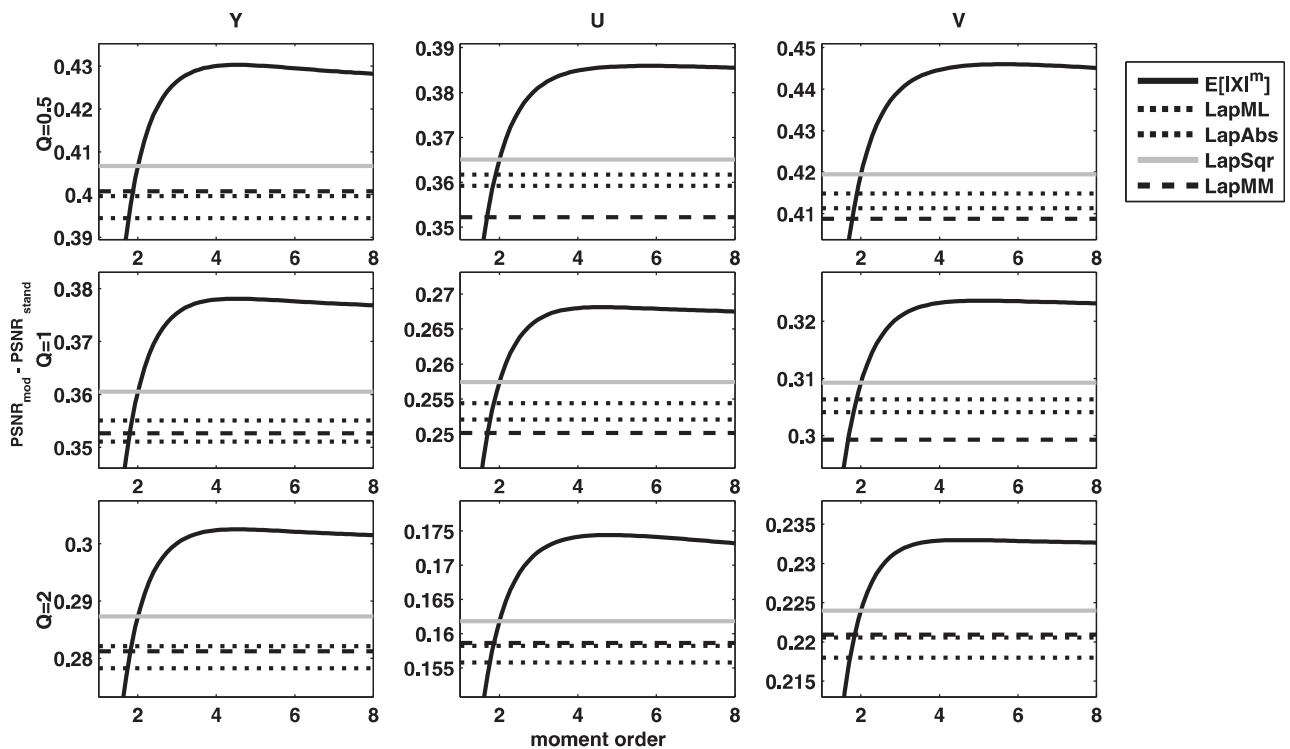
Rysunek 81 przedstawia różnicę między PSNR dla zmodyfikowanej rekonstrukcji obrazu a PSNR dla standardowej rekonstrukcji obrazu ($PSNR_{mod} - PSNR_{stand}$) dla obrazu Sailing3 [152]. Diagramy dla trzech współczynników skalowania tabel kwantyzacji $Q = 0,5$, $Q = 1$ i $Q = 2$ są zorganizowane w wierszach, a komponenty Y, U i V w kolumnach. Można zauważyć, że estymator Laplace'a ze zmiennym rzędem momentu dla rzędu momentu powyżej 2 przewyższa inne estymatory pod względem kryterium PSNR dla składowych Y, U i V oraz dla wybranych współczynników skalowania tabel kwantyzacji.

Te same obliczenia zostały przeprowadzone dla całej bazy danych obrazów LIVE [152], a poprawa PSNR została uśredniona dla wszystkich obrazów oddzielnie dla komponentów Y, U i V oraz dla współczynników skalowania. Wyniki zebrano na rysunku 82. Zgodnie z rysunkiem 82 estymator Laplace'a ze zmiennym rzędem momentu dla rzędu momentu powyżej 2 przewyższa przeciętnie inne estymatory pod względem kryterium PSNR dla składowych Y, U i V dla bazy danych obrazów LIVE [152].

Podsumowując, *opracowana metoda ze zmiennym rzędem momentu pozwala na estymację parametru λ rozkładu dyskretnego Laplace'a dla zmiennej losowej dyskretnej* [147].



Rysunek 81: Poprawa PSNR zmodyfikowanej rekonstrukcji ($PSNR_{mod}$) w stosunku do standardowej rekonstrukcji ($PSNR_{stand}$) obrazu Sailing3 [152] w decybelach; wiersze: współczynniki skalujące tabel kwantyzacji $Q = 0.5$, $Q = 1$ i $Q = 2$; kolumny: składowe Y, U i V; Oś X: rząd momentu (moment order) $m \in \langle 1, 8 \rangle$. Legenda $E[|X|^m]$ (równanie (179)), $LapML$ (równanie (170)), $LapAbs$ (równanie (176)), $LapSqr$ (równanie (173)) i $LapMM$ (równanie (169)) [147]



Rysunek 82: Poprawa PSNR zmodyfikowanej rekonstrukcji ($PSNR_{mod}$) w stosunku do standardowej rekonstrukcji ($PSNR_{stand}$) obrazu w decybelach (średnia wszystkich obrazów z [152]); wiersze: współczynniki skalujące tabel kwantyzacji $Q = 0.5$, $Q = 1$ i $Q = 2$; kolumny: składowe Y, U i V; Oś X: rząd momentu (moment order) $m \in \langle 1, 8 \rangle$. Legenda $E[|X|^m]$ (równanie (179)), $LapML$ (równanie (170)), $LapAbs$ (równanie (176)), $LapSqr$ (równanie (173)) i $LapMM$ (równanie (169)) [147]

Rozkład taki obserwowany jest po stronie dekodera bazującego na transformacie DCT, gdzie współczynniki są już po procesie kwantyzacji i część informacji uległa utracie. Transformata DCT występuje w koderach bazujących na standardach kompresji obrazu JPEG i wideo MPEG. Zamodelowany rozkład w oparciu o zmienne dyskretne zebrane po stronie dekodera, gdzie nie ma pełnej informacji o oryginalnym sygnale, może być wykorzystany do zmodyfikowanej rekonstrukcji obrazu. *Wybór optymalnego rzędu momentu m dla dyskretnego estymatora Laplace'a ze zmiennym rzędem momentu może przewyższyć inne dyskretne estymatory Laplace'a pod względem kryterium jakości PSNR w przypadku zmodyfikowanej rekonstrukcji obrazu dla różnych współczynników kompresji i dla składowych Y , U i V .*

W pracy tej byłem twórcą wykorzystywanego modelu bazującego na szczególnym przypadku rozkładu GGD, tj. rozkładzie Laplace'a, stworzyłem dedykowane oprogramowanie, wykonałem badania dla tego modelu, a także przygotowałem wyniki badań dla wykorzystywanego modelu.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

- 01.07.2023–31.08.2023 realizacja stażu naukowego, którego celem była organizacja i przeprowadzenie wspólnych badań w zakresie estymacji parametrów uogólnionego rozkładu Gaussa oraz zastosowania uogólnionego rozkładu Gaussa w przetwarzaniu sygnałów i obrazów przy udziale kadry z Wydziału Telekomunikacji, Informatyki i Elektrotechniki Politechniki Bydgoskiej, al. prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz.

W wyniku wspólnych badań naukowych powstała praca naukowa [H13], która stała się częścią cyklu habilitacyjnego. Artykuł naukowy został opublikowany w recenzowanym czasopiśmie naukowym IEEE Access o ustalonej wartości Impact Factor (IF 2023=3.4), który w roku opublikowania artykułu w ostatecznej formie był ujęty w wykazie sporządzonym zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 267 ust. 2 pkt 2 lit. b ustawy. Zakres oraz wkład objęty pracą [H13] został omówiony w punkcie 4.3.8.

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

- Promotor 65 prac magisterskich i inżynierskich w latach 2009-2024.
- Recenzent 22 prac dyplomowych.
- Członek 87 komisji egzaminów dyplomowych.
- Prowadzenie zajęć z przedmiotów: Aplikacje mobilne, Programowanie gier i symulacji, Aplikacje internetowe, Programowanie urządzeń mobilnych, Grafika w urządzeniach mobilnych, Systemy mobilne i rozproszone, Programowanie gier sieciowych, Komunikacja człowiek komputer, Sensory w urządzeniach mobilnych, Zastosowania języków skryptowych, Aplikacje internetowe i mobilne, Programowanie aplikacji mobilnych, Wizualizacja komputerowa, Multimedialne sieci cyfrowe, Język programowania Java, Algorytmy kompresji danych, Podstawy technologii WWW, Techniki multimedialne, Telewizja cyfrowa, Grafika komputerowa, Podstawy i algorytmy przetwarzania sygnałów.
- Koordynator kursu Samsung Labo w latach 2016–2019 utworzonego z partnerem z przemysłu. Kurs ten był strategicznym programem firmy Samsung z pogranicza sektora edukacji i rynku pracy.
 - W ramach kursu powstała np. aplikacja „Centrum Akcji” wspierająca grupy ratownicze szukające zaginionych osób utworzona przez studenta K. Malińskiego i wykorzystywana przez ratowników z grupy Zachodniopomorskie Psy Ratownicze OSP Wołczkowo, 2017.
- Koordynator kursu AppLABO w 2020 utworzonego z partnerami z przemysłu z branży IT.
- Popularyzacja nauki poprzez aktywny udział w Nocy Naukowców 28.09.2018.
- Popularyzacja nauki poprzez czynny udział w „Mocy Naukowców”, 16.03.2018.
- Popularyzacja nauki poprzez aktywny udział w Festiwalu Nauki, Laboratorium Inżynierii Multimedialnej, „Rzeczywistość rozszerzona”, 19-24.09.2016, udokumentowane pisemnym podziękowaniem Rektora.
- Wygłoszony wykład „Rzeczywistość rozszerzona” dla młodzieży podczas „Wiosny Nowych Technologii” w Technoparku Pomerania, Szczecin, 31.05.2016.
- Wygłoszony wykład dla młodzieży „Ciekawostki programowania – WWW i Android” na Regionalnym Festiwalu Naukowym E(x)plory w Szczecinie (Technopark Pomerania), 04.03.2016.
- Popularyzacja nauki poprzez aktywny udział w Festiwalu Nauki organizowanym przez Szczecińskie Towarzystwo Naukowe przy współpracy szczecińskich szkół wyższych, wykład „Świat aplikacji mobilnych”, 22-25.09.2015, udokumentowane pisemnym podziękowaniem Rektora.
- Popularyzacja nauki poprzez aktywny udział w Festiwalu Nauki, 20-27.09.2014, udokumentowane pisemnym podziękowaniem Rektora.
- Działania promocyjne ZUT. Prezentacje dla młodzieży z Gorzowa Wielkopolskiego, 24.04.2012.
- Aktywny udział w ramach działań promocyjnych prowadzonych na Wydziale Elektrycznym ZUT, 2009, udokumentowany pisemnym podziękowaniem Dziekana.
- Zorganizowanie otwartego wykładu „O szukaniu błędów w kodzie” przy udziale partnera z przemysłu firmy BrightONE na WE ZUT, 31.05.2017.
- Zorganizowanie otwartego wykładu „IoT – rozbuduj swój system o moduł GSM” przy udziale partnera z przemysłu firmy Global Logic na WE ZUT, 29.03.2017.

- Zorganizowanie otwartego wykładu „Bug tracking – must know każdego dewelopera” przy udziale partnera z przemysłu firmy Global Logic na WE ZUT, 17.11.2016.
- Zorganizowanie otwartego wykładu „Rapid UI prototyping using Qt Quick” przy udziale partnera z przemysłu firmy BrightONE na WE ZUT, 26.04.2016.
- Zorganizowanie otwartego wykładu „Students4Students” na WE ZUT, 19.04.2016.
- Zorganizowanie otwartego wykładu „Podstawy programowania iOS w języku Swift” na WE ZUT, 16.06.2015.
- Zorganizowanie otwartego wykładu „Programowanie natywne i technologia Qt dla Androida” przy udziale partnera z przemysłu firmy BrightONE na WE ZUT, 30.03.2015.
- Opiekun praktyki zawodowej studenta we własnej działalności gospodarczej 21.01.2019–28.02.2019.
- Opiekun praktyk 6 studentów w Katedrze Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej, WE ZUT, 2016.
- Opiekun praktyk 11 studentów Teleinformatyki w Katedrze Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej, WE ZUT, 2015.
- Opiekun praktyk studenta Elektroniki i Telekomunikacji w Katedrze Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej, WE ZUT, 2007.
- Wygłoszenie wykładu inauguracyjnego na WE ZUT, 03.10.2016.
- Przeprowadzenie zajęć dla studentów Uniwersytetu Trzeciego Wieku, WE ZUT, 2017.
- Przeprowadzenie zajęć dydaktycznych z przedmiotu „Projektowanie aplikacji mobilnych” w Zachodniopomorskiej Szkole Biznesu, lato 2017 i lato 2018.

Prace magisterskie

1. Analiza danych z gry zespołowej z wykorzystaniem śledzenia danych, J. Sybidło, 2019.
2. System radiowy naprowadzania drona na platformę lądowniczą, Ł. Majchrzak, 2019.
3. Algorytmy poleceń mentalnych w interfejsach mózg-komputer, A. Baniuszewicz, 2019 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
4. System wizyjny naprowadzania drona na platformę lądowniczą, R. Grabowski, 2019 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
5. Metody detekcji twarzy w systemach mobilnych, P. Janiak, 2018.
6. Metody wyznaczania czasu wschodu i zachodu Słońca dla danej lokalizacji w systemach mobilnych, M. Makos, 2018.
7. Rozpoznawanie mowy w systemie operacyjnym Android, M. Majeran, 2013.
8. Pamięć przenośna USB, M. Romaniszyn, 2012.
9. Techniki zwiększania realizmu w efektach specjalnych na potrzeby produkcji filmowych, A. J. Tyrakowski, 2012.
10. Domowa platforma multimedialna (MHP), W. Hejankowski, 2011.
11. System On Chip w strukturach FPGA, A. J. Popow, 2011.
12. Symulacja cieczy w grafice komputerowej, W. T. Pawlicki, 2011.

13. Symulacja powierzchni wody w grafice komputerowej, M. Tchórzko, 2011.
14. Symulacja dymu, ognia i eksplozji w grafice komputerowej, Ł. Cz. Buliszak, 2011.
15. Systemy archiwizujące w statystyce sportowej, M. Gogol, 2010.
16. Grafika trójwymiarowa w telefonach komórkowych, T. J. Buńka, 2009.
17. Obsługa interfejsu USB 2.0 w procesorze z architekturą ARM, A. Gołuch, 2009.

Prace inżynierskie

1. Mobilny przewodnik turystyczny po Szczecinie, S. Jałojda, 2024.
2. Serwis książkowy dla pisarzy hobbystów, Ł. Jarema, 2024.
3. Aplikacja mobilna dla osób siłujących się na rękę, P. Tachasiuk, 2024.
4. System IoT monitorowania auta, K. Rypuła, 2024.
5. Aplikacja do organizacji rajdów terenowych, W. Wojan, 2024 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
6. Cyfrowa książka kucharska, T. Prostko, 2024 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
7. Aplikacja ogłoszeniowa oparta na technologiach chmurowych, D. Chomicki, 2023.
8. Silnik gry komputerowej 2D bazujący na wieloplatformowej bibliotece Simple DirectMedia Layer, D. Siutkowski, 2023.
9. Elektroniczny system rejestracji czasu pracy z wykorzystaniem technologii RFID, P. Bagrowski, 2023.
10. Aplikacja internetowa wspomagająca prace trenerów w klubach sportowych z wykorzystaniem przetwarzania w chmurze, K. Schmidt, 2023.
11. Aplikacja do detekcji pojazdów z wykorzystaniem sieci neuronowych, D. Olek, 2023.
12. Aplikacja do komunikacji rodzinnej, S. Flonc, 2023.
13. Serwis parujący usługodawców z usługobiorcami, O. Łapuszek, 2022.
14. Automatyczny mobilny system archiwizacji dokumentów w chmurze, F. Gajda, 2022.
15. Automatyzacja generowania i weryfikacji rozwiązań gry logicznej Sudoku, K. Zagdański, 2021.
16. Aplikacja na inteligentny zegarek wyświetlająca wiadomości sportowe, P. Dąbrowski, 2021.
17. Inteligentny system monitorujący poziom zapełnienia pojemników na odpady, K. Stanuch, 2021.
18. Aplikacja na system Android TV dla miłośników kina, P. Czartowska, 2021 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
19. Asystent planowania prywatnych podróży krajoznawczych na urządzenia mobilne, K. Hałaburda, 2020.
20. Aplikacja na Smartphone prezentująca parametry rejsu jednostki pływającej, Ł. Aniszewski, 2020.
21. Projektowanie i prototypowanie doświadczeń użytkowników w aplikacjach internetowych i mobilnych, M. Duczmańska, 2019.
22. Smart T-Shirt, K. Prawucki, 2018.

23. System IoT interaktywnej wystawy eksponatów, A. Olszewski, 2018.
24. System mobilnego marketingu, M. Matera, 2018.
25. System zdalnej współpracy w środowisku wirtualnym z wykorzystaniem rzeczywistości rozszerzonej, Ł. Michalak, 2018.
26. System bezprzewodowego sterowania dronem za pomocą gestów, R. Grabowski, 2018.
27. Bezprzewodowy elektromiograf do pomiaru czynności elektrycznej mięśni, Ł. Gwizdała, 2017.
28. System wykrywania nieprzepisowych manewrów w ruchu drogowym, M. Grudziński, 2017 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
29. Mobilny przewodnik po muzeum z użyciem komunikacji NFC, K. Banasik, 2017.
30. System przetwarzania danych z urządzeń IoT, M. Zawada, 2017 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
31. Projektowanie aplikacji hybrydowych na urządzenia mobilne z wykorzystaniem technologii Apache Cordova, M. Makos, 2017 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
32. Mobilny personalny asystent wędkarski, P. Janiak, 2017.
33. System lokalizacji z wykorzystaniem technologii iBeacon, P. Zawadzki, 2017 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
34. Personalny asystent mechaniki pojazdowej w rozszerzonej rzeczywistości, M. Lubaszewski, 2016.
35. Mobilna komunikacja bliskiego zasięgu, A. Nowak, 2016.
36. Bezpieczeństwo komunikacji w aplikacjach mobilnych, J. Kotłowski, 2016.
37. Interfejsy komunikacyjne w aplikacjach rzeczywistości rozszerzonej, O. Nykiel, 2016.
38. Internetowe systemy płatnicze, M. Wysocki, 2016.
39. Free Lossless Audio Codec (FLAC) w implementacji sprzętowej, D. Wojnar, 2016.
40. Rozszerzenia deweloperskie współczesnych serwisów internetowych, P. Wac, 2016.
41. Portal społecznościowy zrzeszający sportowców amatorów, M. Długosz, 2016.
42. Automatyczny system nawadniania ze sterownikiem na platformy mobilne, M. P. Maćkowiak, 2014 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
43. Standard UPnP na platformie z systemem operacyjnym Android, B. Głuska, 2014.
44. Technologia Java Reflection, M. Urbaniak, 2013.
45. Internetowa aplikacja do nauki modelowania krzywych i powierzchni, K. M. Kogut, 2012.
46. Technologia Java Card w kartach elektronicznych, M. A. Zieliński, 2012.
47. Technologia GPS w systemie operacyjnym Android, M. Majeran, 2012 (praca nominowana do konkursu Dziekana).
48. JSR-82 Java w komunikacji Bluetooth, M. Romaniszyn, 2010.

Przyznane nagrody dyplomantom za prace dyplomowe

1. II miejsce w konkursie organizowanym podczas II Sympozjum „Młodzi. Technika. Przemysł” na Wydziale Elektrycznym. Rok przyznania nagrody 10.03.2017. Praca: System wykrywania nieprzepisowych manewrów w ruchu drogowym, M. Grudziński.
2. Nagroda Dziekana w konkursie na Najlepszą Pracę Dyplomową na kierunku Elektronika i Telekomunikacja w roku akademickim 2011/2012. Praca dyplomowa inżynierska: Technologia GPS w systemie operacyjnym Android, M. Majeran, 2012.

7 Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej

- Badania w zakresie EOG

Poza pracami naukowymi dotyczącymi uogólnionego rozkładu Gaussa prowadziłem również badania związane z elektrookulografią (łączyącą w sobie biosygnaly, grafikę komputerową oraz sprzęt elektroniczny). W szczególności, w zespole dwuosobowym rozwijane były algorytmy służące do śledzenia ruchu gałki ocznej oraz mrugania powiekami na potrzeby animacji komputerowej 3D. Do tego celu wykorzystywany był opracowany, własny system wielokanałowej akwizycji biosygnalów. Opracowano szereg algorytmów do estymacji ruchu gałek ocznych oraz mrugania powiekami, których separacja jest stosunkowo trudna dla minimalnej liczby (trzech) elektrod. Zbadane zostało rozwiązanie z wykorzystaniem filtrów medianowych [153, 154]. Poszukiwane były rozwiązania działające w czasie zbliżonym do rzeczywistego [155, 156, 157]. Badania zostały także przeprowadzone z wykorzystaniem analizy falkowej oraz zespołu (banku) filtrów do analizy w czasie rzeczywistym (analiza zespołem filtrów została zaproponowana przeze mnie) [158].

- W ramach założonej działalności gospodarczej zostały stworzone i samodzielnie zaimplementowane produkty do centrów symulacji medycznej m.in. SM CSM – system internetowy do zarządzania centrum symulacji medycznej oraz scenariuszami symulacyjnymi do szkoleń z symulacji medycznej, SM Studio – aplikacja do sterowania systemem audio-wideo do przeprowadzania szkoleń z symulacji medycznej. Rozwiązania te zostały wdrożone na kierunkach pielęgniarstwo i położnictwo w 18 uczelniach wyższych w Polsce oraz na jednym kierunku lekarskim. Dodatkowo sama aplikacja SM CSM została zainstalowana na kierunkach pielęgniarstwo i położnictwo w 5 innych uczelniach wyższych w Polsce.

System audio-wideo i oprogramowanie w centrach symulacji medycznej są codziennie wykorzystywane do szkolenia studentów, a także do przeprowadzania egzaminów końcowych OSCE. Biorąc pod uwagę liczbę instalacji, można uznać, że ma to duży wpływ na kształcenie i podnoszenie kompetencji kadry medycznej w całej Polsce.

- W Laboratorium Centrum Symulacji Medycznych w Suwałkach przeprowadzane są szkolenia dla kadry dydaktycznej, instruktorów, informatyków i techników symulacji z uczelni wyższych z całej Polski. Oprogramowania do systemu audio-wideo do przeprowadzania symulacji medycznej zostało wykonane przeze mnie. Biorąc pod uwagę liczbę instalacji, można uznać, że ma to duży wpływ na kształcenie i podnoszenie kompetencji wielu osób w całej Polsce.

- Brałem współudział w wykonaniu wielu produktów dla stacji telewizyjnych i radiowych na całym świecie, powstałych w wyniku mojej współpracy z firmami, takimi jak Orad Hi-Tec Systems Poland sp. z o.o. (obecnie należy do Avid Technology, USA). Opracowałem również pierwszy na świecie konwerter grafiki postprodukcyjnej do grafiki telewizyjnej dla firmy Orad Hi-Tec Systems Poland sp. z o.o..

Z kolei, wynikiem mojej współpracy z eemagine Medical Imaging Solutions GmbH jest zaprojektowany i zrealizowany przez mnie medyczny silnik graficzny 3D, który został wprowadzony do ich głównego produktu. W okresie późniejszym rozwiązanie to zostało rozszerzone o nowoczesne metody wizualizacji „Curvilinear reformatting of MRI on the basis of 3D textures.”

- Otrzymane nagrody indywidualne za osiągnięcia naukowe w latach 2010, 2018, 2019, 2020 przyznane przez Rektora Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie.
- Otrzymana nagroda za osiągnięcia w pracy naukowej przyznana przez Rektora Politechniki Szczecińskiej, 03.2007.
- Otrzymana nagroda zespołowa za osiągnięcia organizacyjne w roku akademickim 2016-2017 dla nauczycieli akademickich przyznana przez Rektora Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie (Samsung Labo), 2017.

- Otrzymany certyfikat ukończenia szkolenia z zakresu obsługi systemów GRIP oraz BPMS Tekscan. Projekt NCBiR realizowany przez ZUT, 01.04.2021.
- Otrzymany certyfikat ukończenia szkolenia świadomościowego z problematyki dotyczącej Osób Niepełnosprawnych i Projektowania Uniwersalnego – Poziom I, w ramach projektu pn.: „Akademia Kształtowania Przestrzeni Dostępnej”, Szczecin, 29-30.06.2020.
- Otrzymany certyfikat ukończenia specjalistycznego szkolenia w zakresie Projektowania Uniwersalnego w ramach projektu pn.: „Akademia Kształtowania Przestrzeni Dostępnej”, 14.07.2021.
- Otrzymany certyfikat ukończenia szkolenia w zakresie Umiejętności i Kompetencji Cyfrowych w ramach projektu pn.: „Akademia Kształtowania Przestrzeni Dostępnej”, 08.07.2021.
- Otrzymany certyfikat potwierdzający udział w warsztatach Szersza Perspektywa „Bogaty czy biedny – różny mają kontekst”. Otrzymany tytuł Członka Wspierającego Stowarzyszenia „Szersza Perspektywa”, 02.03.2014.
- Otrzymany certyfikat Microsoft Certificate of Achievement ukończonego kursu Microsoft Approved Course: Programowanie Urządzeń Mobilnych, 28-29.11.2011.
- Otrzymane zaświadczenie o uczestniczeniu w szkoleniu na temat „Przygotowanie biznesplanu” przeprowadzonym przez Polską Fundację Przedsiębiorczości w dniu 24.07.2009 r. w Szczecinie.
- Otrzymane Stypendium Ministra Edukacji Narodowej, 2001/2002.
- Wyróżnienie za projekt na programowalne urządzenia logiczne (PLD) organizowanym przez czasopismo Elektronikę Praktyczną, 1997.

Wykaz pozostałych osiągnięć znajduje się w Załączniku 4.

Literatura

- [1] J. R. Ohm, *Multimedia Communication Technology. Representation, Transmission and Identification of Multimedia Signals*. Springer-Verlag, 2004.
- [2] G. Box, G. C. Tiao, *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Reading, MA: Addison Wesley, 1973.
- [3] H. Abeida, J.-P. Delmas, “Slepian-Bangs formulas for parameterized density generator of elliptically symmetric distributions,” *Signal Processing*, vol. 205, p. 108886, 2023. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2022.108886>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016516842200425X>
- [4] S. K. Choy, C. S. Tong, “Statistical Wavelet Subband Characterization Based on Generalized Gamma Density and Its Application in Texture Retrieval,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 19, no. 2, pp. 281–289, 2010. doi: 10.1109/TIP.2009.2033400
- [5] K.-S. Song, “Globally Convergent Algorithms for Estimating Generalized Gamma Distributions in Fast Signal and Image Processing,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 17, no. 8, pp. 1233–1250, 2008. doi: 10.1109/TIP.2008.926148
- [6] R. J. Clarke, *Transform Coding of Images*. New York: Academic, 1985.
- [7] W. Pennebaker, J.L.Mitchell, *JPEG Still Image Data Compression Standard*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1993.
- [8] F. Müller, “Distribution shape of two-dimensional DCT coefficients of natural images,” *Electronic Letters*, vol. 29, no. 22, pp. 1935–1936, Oct. 1993.
- [9] P. H. Westerink, J. Biemond, D. E. Boeke, “Subband coding of color images,” *Subband Image Coding*, J. W. Woods, Ed. Norwell, MA: Kluwer, 1991.
- [10] B. Aiazzi, L. Alparone, S. Baronti, “Estimation Based on Entropy Matching for Generalized Gaussian PDF Modeling,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 6, no. 6, pp. 138–140, Jun. 1999.
- [11] K. Sharifi, A. Leon-Garcia, “Estimation of Shape Parameter for Generalized Gaussian Distribution in Subband Decompositions of Video,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 5, no. 1, pp. 52–56, Feb. 1995.
- [12] J. R. Hernández, M. Amado, F. Pérez-González, “DCT-Domain Watermarking Techniques for Still Images: Detector Performance Analysis and a New Structure,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, no. 1, pp. 55–68, Jan. 2000. doi: 10.1109/83.817598
- [13] C. Wang, “Research of image segmentation algorithm based on wavelet transform,” *2015 IEEE International Conference on Computer and Communications (ICCC)*, pp. 156–160, Oct 2015. doi: 10.1109/CompComm.2015.7387559
- [14] A. Achim, A. Bezerianos, P. Tsakalides, “Novel Bayesian Multiscale Method for Speckle Removal in Medical Ultrasound Images,” *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 20, no. 8, pp. 772–783, Aug. 2001.
- [15] M. Do, M. Vetterli, “Wavelet-based texture retrieval using generalized Gaussian density and Kullback-Leibler distance,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 11, no. 2, pp. 146–158, 2002. doi: 10.1109/83.982822
- [16] M. S. Allili, “Wavelet Modeling Using Finite Mixtures of Generalized Gaussian Distributions: Application to Texture Discrimination and Retrieval,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 21, no. 4, pp. 1452–1464, 2012. doi: 10.1109/TIP.2011.2170701

- [17] S.-K. Choy, C.-S. Tong, “Supervised Texture Classification Using Characteristic Generalized Gaussian Density,” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 29, no. 1, pp. 35–47, 2007. doi: 10.1007/s10851-007-0023-8
- [18] S. Lavu, H. Choi, R. Baraniuk, “Estimation-Quantization Geometry Coding Using Normal Meshes,” *Proc. of the Data Compression Conference (DCC '03)*, p. 362, Mar. 2003.
- [19] Y. Zhang, J. Wu, X. Xie, L. Li, G. Shi, “Blind image quality assessment with improved natural scene statistics model,” *Digital Signal Processing*, vol. 57, pp. 56–65, 2016. doi: 10.1016/j.dsp.2016.05.012. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200416300495>
- [20] R. Wang, R. Li, H. Sun, “Haze removal based on multiple scattering model with superpixel algorithm,” *Signal Processing*, vol. 127, pp. 24–36, 2016. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.02.003. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168416000414>
- [21] C. Song, F. Li, Y. Dang, H. Gao, Z. Yan, W. Zuo, “Structured detail enhancement for cross-modality face synthesis,” *Neurocomputing*, vol. 212, pp. 107–120, 2016, chinese Conference on Computer Vision 2015 (CCCV 2015). doi: 10.1016/j.neucom.2016.01.119. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925231216307007>
- [22] L. Ma, X. Wang, Q. Liu, K. N. Ngan, “Reorganized DCT-based image representation for reduced reference stereoscopic image quality assessment,” *Neurocomputing*, vol. 215, pp. 21–31, 2016, SI: Stereo Data. doi: 10.1016/j.neucom.2015.06.116. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925231216306397>
- [23] S. Kasaci, M. Deriche, B. Boashash, “A novel fingerprint image compression technique using wavelets packets and pyramid lattice vector quantization,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 11, no. 12, pp. 1365–1378, 2002. doi: 10.1109/TIP.2002.802534
- [24] S. Chang, B. Yu, M. Vetterli, “Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, no. 9, pp. 1532–1546, 2000. doi: 10.1109/83.862633
- [25] P. Moulin, J. Liu, “Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized Gaussian and complexity priors,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 3, pp. 909–919, 1999. doi: 10.1109/18.761332
- [26] X.-Y. Wang, X. Shen, J.-L. Tian, P.-P. Niu, H.-Y. Yang, “Statistical image watermark decoder using high-order difference coefficients and bounded generalized Gaussian mixtures-based HMT,” *Signal Processing*, vol. 192, p. 108371, 2022. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2021.108371>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168421004084>
- [27] J. Liu, “An Image Watermarking Algorithm Based on Energy Scheme in the Wavelet Transform Domain,” *2018 IEEE 3rd International Conference on Image, Vision and Computing (ICIVC)*, 2018, pp. 668–672. doi: 10.1109/ICIVC.2018.8492868
- [28] Y. Bazi, L. Bruzzone, F. Melgani, “An unsupervised approach based on the generalized Gaussian model to automatic change detection in multitemporal SAR images,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, no. 4, pp. 874–887, 2005. doi: 10.1109/TGRS.2004.842441
- [29] X. Zhang, J. Chen, H. Meng, “A Novel SAR Image Change Detection Based on Graph-Cut and Generalized Gaussian Model,” *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 10, no. 1, pp. 14–18, 2013. doi: 10.1109/LGRS.2012.2189867
- [30] L. Yu, Y. Ma, Z. Hu, “Gabor Texture Information for Face Recognition Using the Generalized Gaussian Model,” *2011 Sixth International Conference on Image and Graphics*, 2011, pp. 303–308. doi: 10.1109/ICIG.2011.139

- [31] S. Gazor, W. Zhang, "Speech Probability Distribution," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 10, no. 7, pp. 204–207, Jul. 2003.
- [32] X.-Q. Zhang, J. Du, L. Chai, C.-H. Lee, "A Maximum Likelihood Approach to SNR-Progressive Learning Using Generalized Gaussian Distribution for LSTM-Based Speech Enhancement," *Proc. Interspeech 2021*, 2021, pp. 2701–2705. doi: 10.21437/Interspeech.2021-922
- [33] S.-T. Niu, J. Du, L. Chai, C.-H. Lee, "A Maximum Likelihood Approach to Multi-Objective Learning Using Generalized Gaussian Distributions for Dnn-Based Speech Enhancement," *ICASSP 2020 - 2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2020, pp. 6229–6233. doi: 10.1109/ICASSP40776.2020.9053995
- [34] X. Zheng, B. Dumitrescu, J. Liu, C. D. Giurcãeanu, "Dictionary learning for signals in additive noise with generalized Gaussian distribution," *Signal Processing*, vol. 195, p. 108488, 2022. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2022.108488>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168422000354>
- [35] H. Wang, J. Liang, L. Yu, Y. Gu, H. Yin, "Generalized Gaussian Distribution Based Distortion Model for the H.266/VVC Video Coder," *2022 IEEE International Conference on Visual Communications and Image Processing (VCIP)*, 2022, pp. 1–5. doi: 10.1109/VCIP56404.2022.10008905
- [36] F. Che, Q. Z. Ahmed, J. Fontaine, B. Van Herbruggen, A. Shahid, E. De Poorter, P. I. Lazaridis, "Feature-Based Generalized Gaussian Distribution Method for NLoS Detection in Ultra-Wideband (UWB) Indoor Positioning System," *IEEE Sensors Journal*, vol. 22, no. 19, pp. 18 726–18 739, 2022. doi: 10.1109/JSEN.2022.3198680
- [37] R. Dhandapani, I. Mitiche, S. McMeekin, G. Morison, "A Novel Bearing Faults Detection Method Using Generalized Gaussian Distribution Refined Composite Multiscale Dispersion Entropy," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 71, pp. 1–12, 2022. doi: 10.1109/TIM.2022.3187717
- [38] X. Tao, C. Ren, Y. Wu, Q. Li, W. Guo, R. Liu, Q. He, J. Zou, "Bearings fault detection using wavelet transform and generalized Gaussian density modeling," *Measurement*, vol. 155, p. 107557, 2020. doi: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.107557>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224120300944>
- [39] A. Aiba, M. Yoshida, D. Kitamura, S. Takamichi, H. Saruwatari, "Noise Robust Acoustic Anomaly Detection System with Nonnegative Matrix Factorization Based on Generalized Gaussian Distribution," *IEICE Transactions on Information and Systems*, vol. E104.D, no. 3, pp. 441–449, 2021. doi: 10.1587/transinf.2020EDK0002
- [40] S. Banerjee, M. Agrawal, F. Fauziya, "A Generalized Gaussian noise receiver for improved underwater communication in leptokurtic noise," *OCEANS 2017 - Aberdeen*, 2017, pp. 1–9. doi: 10.1109/OCEANSE.2017.8085028. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8085028>
- [41] J. Duan, M. Wan, H.-W. Deng, Y.-P. Wang, "Modeling exome sequencing data with generalized Gaussian distribution with application to copy number variation detection," *2013 IEEE International Conference on Bioinformatics and Biomedicine*, 2013, pp. 1–7. doi: 10.1109/BIBM.2013.6732619
- [42] E. Soave, G. D'Elia, G. Dalpiaz, "Prognostics of rotating machines through generalized Gaussian hidden Markov models," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 185, p. 109767, 2023. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2022.109767>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327022008354>
- [43] G. Liu, J. Wu, S. Zhou, "Probabilistic classifiers with a generalized Gaussian scale mixture prior," *Pattern Recognition*, vol. 46, no. 1, pp. 332–345, 2013. doi: <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2012.07.016>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320312003329>

- [44] N. Beaulieu, H. Shao, J. Fiorina, “P-order metric UWB receiver structures with superior performance,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 56, no. 10, pp. 1666–1676, 2008. doi: 10.1109/TCOMM.2008.060584
- [45] A. Mehrabian, M. Sabbaghian, H. Yanikomeroglu, “CNN-Based Detector for Spectrum Sensing With General Noise Models,” *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 22, no. 2, pp. 1235–1249, 2023. doi: 10.1109/TWC.2022.3203732
- [46] E. Gómez, M. Gomez-Viilegas, J. Marín, “A multivariate generalization of the power exponential family of distributions,” *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 27, no. 3, pp. 589–600, 1998. doi: 10.1080/03610929808832115. URL: <https://doi.org/10.1080/03610929808832115>
- [47] J. Lindsey, P. Lindsey, “Multivariate distributions with correlation matrices for nonlinear repeated measurements,” *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 50, no. 3, pp. 720–732, 2006. doi: <https://doi.org/10.1016/j.csda.2004.09.011>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947304002944>
- [48] F. Pascal, L. Bombrun, J. Y. Tournier, Y. Berthoumieu, “Parameter Estimation For Multivariate Generalized Gaussian Distributions,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, no. 23, pp. 5960–5971, Dec 2013. doi: 10.1109/TSP.2013.2282909
- [49] N. Ouzir, F. Pascal, J.-C. Pesquet, “Convex Parameter Estimation of Perturbed Multivariate Generalized Gaussian Distributions,” 2023. doi: 10.48550/arXiv.2312.07479
- [50] Z. Boukouvalas, S. Said, L. Bombrun, Y. Berthoumieu, T. Adah, “A New Riemannian Averaged Fixed-Point Algorithm for MGGD Parameter Estimation,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22, no. 12, pp. 2314–2318, 2015. doi: 10.1109/LSP.2015.2478803
- [51] N. Nacereddine, A. B. Goumeidane, D. Ziou, “Unsupervised weld defect classification in radiographic images using multivariate generalized Gaussian mixture model with exact computation of mean and shape parameters,” *Computers in Industry*, vol. 108, pp. 132–149, 2019. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compind.2019.02.010>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166361518305967>
- [52] Y. Li, W. Cao, W. Hu, C. Gan, M. Wu, “Fault detection for geological drilling processes using multivariate generalized Gaussian distribution and Kullback Leibler divergence,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, no. 2, pp. 164–169, 2020, 21st IFAC World Congress. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.115>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896320303712>
- [53] Y. Li, W. Cao, W. Hu, Y. Xiong, M. Wu, “Incipient fault detection for geological drilling processes using multivariate generalized Gaussian distributions and Kullback–Leibler divergence,” *Control Engineering Practice*, vol. 117, p. 104937, 2021. doi: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2021.104937>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066121002148>
- [54] E. L. Lehmann, *Theory of Point Estimation*. New York: John Wiley, 1983.
- [55] H. Stark, J. W. Woods, *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing*. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
- [56] D. Zwillinger, S. Kokoska, *CRC standard probability and statistics tables and formulae*. New York: Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [57] R. Deutsch, *Estimation Theory*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965.
- [58] Y. Du, “Ein sphärisch invariantes Verbunddichtemodell für Bildsignale,” *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, vol. AEÜ-45, no. 3, pp. 148–159, May 1991.

- [59] S. G. Mallat, "A Theory of Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674–693, Jul. 1989. doi: 10.1109/34.192463. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/192463>
- [60] M. Novey, T. Adali, A. Roy, "A Complex Generalized Gaussian Distribution - Characterization, Generation, and Estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 3, pp. 1427–1433, March 2010. doi: 10.1109/TSP.2009.2036049
- [61] K. A. Birney, T. R. Fischer, "On the modeling of DCT and subband image data for compression," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 4, no. 2, pp. 186–193, Feb. 1995.
- [62] R. L. Joshi, T. R. Fischer, "Comparison of Generalized Gaussian and Laplacian Modeling in DCT Image Coding," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 2, no. 5, pp. 81–82, May 1995.
- [63] **R. Krupiński**, J. Purczyński, "Approximated fast estimator for the shape parameter of generalized Gaussian distribution," *Signal Processing*, vol. 86, no. 2, pp. 205–211, Feb. 2006. doi: 10.1016/j.sigpro.2005.05.003. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016516840500143X>
- [64] R. Prasad, H. Saruwatari, K. Shikano, "Estimation of Shape Parameter of GGD Function by Ne-gentropy Matching," *Neural Processing Letters*, vol. 22, pp. 377–389, 12 2005. doi: 10.1007/s11063-005-1385-9
- [65] S.Yu, A.Zhang, H.Li, "A review of estimating the shape parameter of generalized Gaussian distribution," *J. Comput. Information Systems*, vol. 21, no. 8, pp. 9055–9064, Aug. 2012. URL: http://www.jofcis.com/downloadpaper.aspx?id=2756&name=2012_8_21_9055_9064.pdf
- [66] **R. Krupiński**, J. Purczyński, "Modeling the distribution of DCT coefficients for JPEG reconstruction," *Signal Processing: Image Communication*, vol. 22, no. 5, pp. 439–447, Jun. 2007. doi: 10.1016/j.image.2007.03.003. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0923596507000331>
- [67] K. Kokkinakis, A. K. Nandi, "Exponent Parameter Estimation for Generalized Gaussian Probability Density Functions with Application to Speech Modeling," *Signal Process.*, vol. 85, no. 9, pp. 1852–1858, Sep. 2005. doi: 10.1016/j.sigpro.2005.02.017
- [68] F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*. New York: Academic Press, 1974.
- [69] F. Chapeau-Blondeau, A. Monir, "Numerical evaluation of the lambert w function and application to generation of generalized gaussian noise with exponent 1/2," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 9, pp. 2160–2165, Sep. 2002. doi: 10.1109/TSP.2002.801912
- [70] M. K. Varanasi, B. Aazhang, "Parametric generalized Gaussian density estimation," *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 86, no. 4, pp. 1404–1415, Oct. 1989.
- [71] I. Pitas, A. Venetsanopoulos, *Nonlinear Digital Filters: Principles and Applications*. Norwell, MA: Kluwer Academic, 1990.
- [72] O. Yli-Harja, J. Astola, Y. Neuvo, "Statistical properties of median, weighted median and stack filters," *Circuit Theory and Design*, pp. 354–357, Sep. 1989.
- [73] A. Burian, P. Kuosmanen, "Recursive median filtering with partial replaces," *NSIP*, 1999, pp. 61–64.
- [74] G. R. Arce, "A general weighted median filter structure admitting negative weights," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 46, pp. 3195–3205, Dec. 1998.
- [75] G. Sicuranza, "Theory and realization of nonlinear digital filters," *Proc. 1984 IEEE Int. Symp. Circuits Systems*, May 1984.

- [76] K. E. Barner, T. C. Aysal, “Polynomial Weighted Median Filtering,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 54, no. 2, pp. 636–650, Feb. 2006.
- [77] B. Weng, T. C. Aysal, K. E. Barner, “Polynomial Weighted Median Image Sequence Prediction,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 17, no. 12, pp. 1764–1770, Dec. 2007. doi: 10.1109/TCSVT.2007.906944. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/4358682>
- [78] K.-S. Choi, A. W. Morales, S.-J. Ko, “Design of linear combination of weighted medians,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 49, pp. 1940–1952, Sep. 2001.
- [79] E. Masry, “Alpha-stable signals and adaptive filtering,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 48, no. 11, pp. 3011–3016, 2000. doi: 10.1109/78.875458
- [80] S. Meignen, H. Meignen, “On the modeling of small sample distributions with generalized Gaussian density in a maximum likelihood framework,” *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 15, no. 6, pp. 1647–1652, June 2006. doi: 10.1109/TIP.2006.873455
- [81] J. R. Price, M. Rabbani, “Biased Reconstruction for JPEG Decoding,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 6, no. 12, pp. 297–299, Dec. 1999.
- [82] M. D. Paez, T. H. Glisson, “Minimum Mean-Square-Error Quantization in Speech PCM and DPCM Systems,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-20, pp. 225–230, Apr. 1972.
- [83] D. Venkatraman, V. V. Reddy, A. W. H. Khong, “On the use of the quaternion generalized Gaussian distribution for footstep detection,” *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, May 2013, pp. 6521–6525. doi: 10.1109/ICASSP.2013.6638922
- [84] C. C. Took, D. P. Mandic, “The Quaternion LMS Algorithm for Adaptive Filtering of Hypercomplex Processes,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 4, pp. 1316–1327, April 2009. doi: 10.1109/TSP.2008.2010600
- [85] A. van den Bos, “The multivariate complex normal distribution—a generalization,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, no. 2, pp. 537–539, Mar 1995. doi: 10.1109/18.370165
- [86] P. J. Schreier, L. L. Scharf, “Second-order analysis of improper complex random vectors and processes,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no. 3, pp. 714–725, March 2003. doi: 10.1109/TSP.2002.808085
- [87] S. L. Goh, D. P. Mandic, “An Augmented Extended Kalman Filter Algorithm for Complex-Valued Recurrent Neural Networks,” *Neural Computation*, vol. 19, no. 4, pp. 1039–1055, April 2007. doi: 10.1162/neco.2007.19.4.1039
- [88] D. Mandic, V. S. L. Goh, *Complex Valued Nonlinear Adaptive Filters: Noncircularity, Widely Linear and Neural Models*. Wiley Publishing, 2009.
- [89] H. H. Andersen, M. Højbjerg, D. Sørensen, P. S. Eriksen, *The Multivariate Complex Normal Distribution*. New York, NY: Springer New York, 1995, pp. 15–37. doi: 10.1007/978-1-4612-4240-6_2
- [90] J. Eriksson, V. Koivunen, “Complex random vectors and ICA models: identifiability, uniqueness, and separability,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 3, pp. 1017–1029, March 2006. doi: 10.1109/TIT.2005.864440
- [91] B. Picinbono, “Second-order complex random vectors and normal distributions,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 10, pp. 2637–2640, Oct 1996. doi: 10.1109/78.539051
- [92] O. Grellier, P. Comon, B. Mourrain, P. Trebuchet, “Analytical blind channel identification,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 9, pp. 2196–2207, Sep 2002. doi: 10.1109/TSP.2002.801887

- [93] B. Picinbono, P. Bondon, "Second-order statistics of complex signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 411–420, Feb 1997. doi: 10.1109/78.554305
- [94] M. Novey, T. Adali, A. Roy, "Circularity and Gaussianity Detection Using the Complex Generalized Gaussian Distribution," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 16, no. 11, pp. 993–996, Nov 2009. doi: 10.1109/LSP.2009.2028412
- [95] R. Mowakeaa, Z. Boukouvalas, Q. Long, T. Adali, "IVA using complex multivariate GGD: application to fMRI analysis," *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 31, no. 2, pp. 725–744, 2020, cited by: 0; All Open Access, Green Open Access. doi: 10.1007/s11045-019-00685-0
- [96] M. S. Greco, S. Fortunati, F. Gini, "Naive, robust or fully-adaptive: An estimation problem for CES distributions," *2014 IEEE 8th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM)*, 2014, pp. 457–460. doi: 10.1109/SAM.2014.6882441
- [97] E. Ollila, D. E. Tyler, V. Koivunen, H. V. Poor, "Complex Elliptically Symmetric Distributions: Survey, New Results and Applications," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 11, pp. 5597–5625, 2012. doi: 10.1109/TSP.2012.2212433
- [98] E. Ollila, J. Eriksson, V. Koivunen, "Complex Elliptically Symmetric Random Variables — Generation, Characterization, and Circularity Tests," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 1, pp. 58–69, 2011. doi: 10.1109/TSP.2010.2083655
- [99] P. A. Rodriguez, V. D. Calhoun, T. Adali, "De-noising, phase ambiguity correction and visualization techniques for complex-valued ICA of group fMRI data," *Pattern Recognition*, vol. 45, no. 6, pp. 2050–2063, 2012, brain Decoding. doi: <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2011.04.033>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320311002020>
- [100] F. Zhang, "Quaternions and matrices of quaternions," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 251, pp. 21–57, 1997. doi: 10.1016/0024-3795(95)00543-9. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379595005439>
- [101] C. C. Took, D. P. Mandic, "Augmented second-order statistics of quaternion random signals," *Signal Processing*, vol. 91, no. 2, pp. 214 – 224, 2011. doi: 10.1016/j.sigpro.2010.06.024. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168410002719>
- [102] D. Choukroun, I. Y. Bar-Itzhack, Y. Oshman, "Novel quaternion Kalman filter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 42, no. 1, pp. 174–190, Jan 2006. doi: 10.1109/TAES.2006.1603413
- [103] S. Miron, N. L. Bihan, J. I. Mars, "Quaternion-MUSIC for vector-sensor array processing," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 4, pp. 1218–1229, April 2006. doi: 10.1109/TSP.2006.870630
- [104] S. Said, N. L. Bihan, S. J. Sangwine, "Fast Complexified Quaternion Fourier Transform," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 4, pp. 1522–1531, April 2008. doi: 10.1109/TSP.2007.910477
- [105] P. Bas, N. L. Bihan, J. M. Chassery, "Color image watermarking using quaternion Fourier transform," *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003. Proceedings. (ICASSP '03). 2003 IEEE International Conference on*, vol. 3, April 2003, pp. III–521–4 vol.3. doi: 10.1109/ICASSP.2003.1199526
- [106] N. L. Bihan, J. Mars, "Singular value decomposition of quaternion matrices: a new tool for vector-sensor signal processing," *Signal Processing*, vol. 84, no. 7, pp. 1177 – 1199, 2004. doi: 10.1016/j.sigpro.2004.04.001. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168404000647>

- [107] S. D. Leo, G. Sclarici, L. Solombrino, “Quaternionic eigenvalue problem,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 43, no. 11, pp. 5815–5829, 2002. doi: 10.1063/1.1511789
- [108] N. L. Bihan, S. J. Sangwine, “Quaternion principal component analysis of color images,” *ICIP*, 2003.
- [109] H. C. Lee, “Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients,” *Proceeding of the Royal Irish Academy*, vol. 52, pp. 253–261, Dec 1949.
- [110] R. M. W. Wood, “Quaternionic Eigenvalues,” *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 17, no. 2, pp. 137–138, March 1985. doi: 10.1112/blms/17.2.137. URL: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/blms/17.2.137>
- [111] L. Huang, W. So, “On left eigenvalues of a quaternionic matrix,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 323, no. 1, pp. 105 – 116, 2001. doi: 10.1016/S0024-3795(00)00246-9. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379500002469>
- [112] V. Zarzoso, A. K. Nandi, “Closed-form semi-blind separation of three sources from three real-valued instantaneous linear mixtures via quaternions,” *Proceedings of the Sixth International Symposium on Signal Processing and its Applications (Cat.No.01EX467)*, vol. 1, 2001, pp. 1–4 vol.1. doi: 10.1109/ISSPA.2001.949760
- [113] S.-C. Pei, C.-M. Cheng, “Color image processing by using binary quaternion-moment-preserving thresholding technique,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, no. 5, pp. 614–628, May 1999. doi: 10.1109/83.760310
- [114] C. F. Karney, “Quaternions in molecular modeling,” *Journal of Molecular Graphics and Modelling*, vol. 25, no. 5, pp. 595 – 604, 2007. doi: 10.1016/j.jmgm.2006.04.002. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1093326306000829>
- [115] D. Biamino, G. Cannata, M. Maggiali, A. Piazza, “MAC-EYE: a tendon driven fully embedded robot eye,” *5th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, 2005.*, Dec 2005, pp. 62–67. doi: 10.1109/ICHR.2005.1573546
- [116] J. J. F. S. B. Choe, “Modeling head and hand orientation during motion using quaternions,” *J. Aerosp.*, vol. 113, no. 1, pp. 186–192, 2004. doi: 10.4271/2004-01-2179
- [117] J. Navarro-Moreno, R. M. Fernández-Alcalá, J. C. Ruiz-Molina, “A Quaternion Widely Linear Model for Nonlinear Gaussian Estimation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 24, pp. 6414–6424, 2014. doi: 10.1109/TSP.2014.2364790
- [118] J. Vía, D. P. Palomar, L. Vielva, I. Santamaría, “Quaternion ICA From Second-Order Statistics,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 4, pp. 1586–1600, 2011. doi: 10.1109/TSP.2010.2101065
- [119] Y. Xia, M. Xiang, Z. Li, D. P. Mandic, “Chapter 12 - Echo State Networks for Multidimensional Data: Exploiting Noncircularity and Widely Linear Models,” *Adaptive Learning Methods for Nonlinear System Modeling*, D. Comminiello, J. C. Príncipe, Eds. Butterworth-Heinemann, 2018, pp. 267–288. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812976-0.00016-6>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128129760000166>
- [120] J. Vía, D. Ramírez, I. Santamaría, “Properness and Widely Linear Processing of Quaternion Random Vectors,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, no. 7, pp. 3502–3515, 2010. doi: 10.1109/TIT.2010.2048440
- [121] C. Cheong Took, D. P. Mandic, “A Quaternion Widely Linear Adaptive Filter,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 8, pp. 4427–4431, 2010. doi: 10.1109/TSP.2010.2048323

- [122] J. Navarro-Moreno, R. M. Fernandez-Alcala, J. C. Ruiz-Molina, "A Quaternion Widely Linear Series Expansion and Its Applications," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 19, no. 12, pp. 868–871, 2012. doi: 10.1109/LSP.2012.2221700
- [123] C. Jahanchahi, D. P. Mandic, "A Class of Quaternion Kalman Filters," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 533–544, 2014. doi: 10.1109/TNNLS.2013.2277540
- [124] C. C. Took, G. Strbac, K. Aihara, D. Mandic, "Quaternion-valued short-term joint forecasting of three-dimensional wind and atmospheric parameters," *Renewable Energy*, vol. 36, no. 6, pp. 1754–1760, 2011. doi: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2010.12.013>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148110005677>
- [125] M. Xiang, B. Scalzo Dees, D. P. Mandic, "Multiple-Model Adaptive Estimation for 3-D and 4-D Signals: A Widely Linear Quaternion Approach," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 30, no. 1, pp. 72–84, 2019. doi: 10.1109/TNNLS.2018.2829526
- [126] H. Zhang, H. Lv, "Augmented Quaternion Extreme Learning Machine," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 90 842–90 850, 2019. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2925893
- [127] S. Zhu, H. Wang, H. Lv, H. Zhang, "Augmented Online Sequential Quaternion Extreme Learning Machine," *Neural Process. Lett.*, vol. 53, no. 2, pp. 1161–1186, apr 2021. doi: 10.1007/s11063-021-10435-8. URL: <https://doi.org/10.1007/s11063-021-10435-8>
- [128] E. Grassucci, D. Comminiello, A. Uncini, "An Information-Theoretic Perspective on Proper Quaternion Variational Autoencoders," *Entropy*, vol. 23, no. 7, 2021. doi: 10.3390/e23070856. URL: <https://www.mdpi.com/1099-4300/23/7/856>
- [129] Q. Li, "RUL Estimation for Rolling Bearings Using Augmented Quaternion-Based Least Mean P-Power With Correntropy Induced Metric Under Framework of Sparsity," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 28, no. 2, pp. 976–989, 2023. doi: 10.1109/TMECH.2022.3210765
- [130] Q. Li, Z. Ren, "A New Fractional-Order Augmented Quaternion-Valued Approach for Degradation Prognostics of Bearings Using Generalized Hamilton-Real Calculus," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 71, pp. 1–11, 2022. doi: 10.1109/TIM.2022.3218546
- [131] A. Oya, "RKHS Representations for Augmented Quaternion Random Signals: Application to Detection Problems," *Mathematics*, vol. 10, no. 23, 2022. doi: 10.3390/math10234432. URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/23/4432>
- [132] N. Le Bihan, P. Amblard, "Detection and Estimation of Gaussian Proper Quaternion Valued Random Processes," *Proc. IMA Conf. on Mathematics*, pp. 23–26, 01 2006.
- [133] G. P. Succi, D. Clapp, R. Gampert, G. Prado, "Footstep detection and tracking," *Proc.SPIE*, vol. 4393, pp. 4393 – 4393 – 8, 2001. doi: 10.1117/12.441277
- [134] K. T. Wong, M. D. Zoltowski, "Orthogonal velocity-hydrophone ESPRIT for sonar source localization," *OCEANS 96 MTS/IEEE Conference Proceedings. The Coastal Ocean - Prospects for the 21st Century*, vol. 3, Sep 1996, pp. 1307–1312 vol.3. doi: 10.1109/OCEANS.1996.569092
- [135] T. A. Ell, S. J. Sangwine, "Quaternion involutions and anti-involutions," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 53, no. 1, pp. 137 – 143, 2007. doi: 10.1016/j.camwa.2006.10.029. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122107001836>
- [136] P. O. Amblard, N. Le Bihan, "On properness of quaternion valued random variables," *Proceedings of International Conference on Mathematics (IMA) in Signal Processing*, 2004, pp. 23–26.
- [137] E. W. Weisstein, "Sphere Point Picking," 2018. URL: <http://mathworld.wolfram.com/SpherePointPicking.html>

- [138] N. Le Bihan, “The geometry of proper quaternion random variables,” *Signal Processing*, vol. 138, pp. 106–116, 2017. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2017.03.017>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168417301093>
- [139] G. Verdoolaege, P. Scheunders, “On the Geometry of Multivariate Generalized Gaussian Models,” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 43, no. 3, pp. 180 – 193, 2012. doi: 10.1007/s10851-011-0297-8
- [140] L. Bombrun, F. Pascal, J.-Y. Tourneret, Y. Berthoumieu, “Performance of the maximum likelihood estimators for the parameters of multivariate generalized Gaussian distributions,” *2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2012, pp. 3525–3528. doi: 10.1109/ICASSP.2012.6288677
- [141] E. Kornatowski, “Mechanical-Condition Assessment of Power Transformer Using Vibroacoustic Analysis,” *Advanced Materials in Microwaves and Optics*, ser. Key Engineering Materials, vol. 500. Trans Tech Publications Ltd, 3 2012, pp. 40–44. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.500.40
- [142] I. Pratikakis, K. Zagori, P. Kaddas, B. Gatos, “ICFHR 2018 Competition on Handwritten Document Image Binarization (H-DIBCO 2018),” *2018 16th International Conference on Frontiers in Handwriting Recognition (ICFHR)*, 2018, pp. 489–493. doi: 10.1109/ICFHR-2018.2018.00091
- [143] N. Otsu, “A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 9, no. 1, pp. 62–66, 1979. doi: 10.1109/TSMC.1979.4310076
- [144] D. Bradley, G. Roth, “Adaptive Thresholding using the Integral Image,” *Journal of Graphics Tools*, vol. 12, no. 2, pp. 13–21, 2007. doi: 10.1080/2151237X.2007.10129236. URL: <https://doi.org/10.1080/2151237X.2007.10129236>
- [145] F. Deng, Z. Wu, Z. Lu, M. S. Brown, “BinarizationShop: A User-Assisted Software Suite for Converting Old Documents to Black-and-White,” *Proceedings of the 10th Annual Joint Conference on Digital Libraries*, ser. JCDL ’10. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2010, pp. 255–258. doi: 10.1145/1816123.1816161. URL: <https://doi.org/10.1145/1816123.1816161>
- [146] I. Pratikakis, K. Zagoris, X. Karagiannis, L. Tsochatzidis, T. Mondal, I. Marthot-Santaniello, “ICDAR 2019 Competition on Document Image Binarization (DIBCO 2019),” *2019 International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR)*, 2019, pp. 1547–1556. doi: 10.1109/ICDAR.2019.00249
- [147] **R. Krupiński**, P. Mazurek, “Discrete Laplace estimator with a variable moment order for the modified image reconstruction,” *ICSES 2010 International Conference on Signals and Electronic Systems*, 2010, pp. 143–146, pod patronatem Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji PAN oraz polskiej sekcji IEEE. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5595230>
- [148] S. R. Smoot, L. A. Rowe, “Study of DCT coefficients distributions,” *Proc. SPIE*, pp. 403–411, Jan. 1996.
- [149] **R. Krupiński**, J. Purczyński, “First absolute moment and variance estimators used in JPEG reconstruction,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 11, no. 8, pp. 674–677, Aug. 2004. doi: 10.1109/LSP.2004.831673. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1316883>
- [150] R. L. de Queiroz, “Processing JPEG-compressed images and documents,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, no. 12, pp. 1661–1672, Dec. 1998.
- [151] A. J. Ahumada, R. Horng, “Smoothing DCT compression artifacts,” *SID Dig.*, 1994.
- [152] H. R. Sheikh, Z. Wang, L. Cormack, A. C. Bovik, “LIVE Image Quality Assessment Database Release 2,” 2005, <http://live.ece.utexas.edu/research/quality>.

- [153] **R. Krupiński**, P. Mazurek, “Estimation of Eye Blinking Using Biopotentials Measurements for Computer Animation Applications,” *Computer Vision and Graphics*, ser. Lecture Notes in Computer Science, L. Bolc, J. L. Kulikowski, K. Wojciechowski, Eds., vol. 5337. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 302–310, International Conference on Computer Vision and Graphics (ICCVG 2008). doi: 10.1007/978-3-642-02345-3_30
- [154] **R. Krupiński**, P. Mazurek, “Median Filters Optimization for Electrooculography and Blinking Signal Separation using Synthetic Model,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 42, no. 13, pp. 326–331, 2009, 14th IFAC International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2009). doi: 10.3182/20090819-3-PL-3002.00057. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667015304602>
- [155] **R. Krupiński**, P. Mazurek, “Electrooculography Signal Estimation by Using Evolution–Based Technique for Computer Animation Applications,” *Computer Vision and Graphics*, ser. Lecture Notes in Computer Science, L. Bolc, R. Tadeusiewicz, L. J. Chmielewski, K. Wojciechowski, Eds., vol. 6374. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 139–146, International Conference on Computer Vision and Graphics (ICCVG 2010). doi: 10.1007/978-3-642-15910-7_16
- [156] **R. Krupiński**, P. Mazurek, “Sensitivity analysis of eye blinking detection using evolutionary approach,” *ICSES 2010 International Conference on Signals and Electronic Circuits*, 2010, pp. 81–84, pod patronatem Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji PAN oraz polskiej sekcji IEEE. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5595249>
- [157] **R. Krupiński**, P. Mazurek, “Convergence Improving in Evolution–Based Technique for Estimation and Separation of Electrooculography and Blinking Signals,” *Information Technologies in Biomedicine*, ser. Advances in Intelligent and Soft Computing, E. Piętka, J. Kawa, Eds., vol. 69. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 293–302. doi: 10.1007/978-3-642-13105-9_30
- [158] **R. Krupiński**, P. Mazurek, “Estimation of Electrooculography and Blinking Signals Based on Filter Banks,” *Computer Vision and Graphics*, ser. Lecture Notes in Computer Science, L. Bolc, R. Tadeusiewicz, L. J. Chmielewski, K. Wojciechowski, Eds., vol. 7594. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 156–163, International Conference on Computer Vision and Graphics (ICCVG 2012). doi: 10.1007/978-3-642-33564-8_19

