Szczecin, 7.01.2019r.

Autoreferat

przedstawiający opis dorobku i osiągnięć naukowych

1. Imię i nazwisko

Marek Landowski

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

20 X 2009	Uzyskanie stopnia naukowego doktora nauk technicznych w dyscyplinie informatyka, Wydział Informatyki, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, temat rozprawy doktorskiej: Metody identyfikacji probabilistycznych modeli ludzkich percepcji wyrażonych w formie słowników kwantyfikatorów lingwistycznych
29 VI 2004	Uzyskanie tytułu magistra inżyniera informatyki, Wydział Informatyki, Politechnika Szczecińska w Szczecinie (obecnie Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie) z oceną bardzo dobrą na dyplomie
13 VI 2002	Uzyskanie tytułu magistra matematyki, Wydział Matematyczno-Fizyczny, Uniwersytet Szczeciński w Szczecinie z oceną bardzo dobrą na dyplomie

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

2014-obecnie	Adiunkt, Kierownik Zakładu Metod Matematycznych, Zakład Metod Matematycznych, Wydział Inżynieryjno-Ekonomiczny Transportu, Akademia Morska w Szczecinie
2012-2013	Adiunkt, Zakład Informatyki, Wydział Matematyczno-Fizyczny, Uniwersytet Szczeciński w Szczecinie
2009-2014	Adiunkt, Zakład Metod Ilościowych, Wydział Inżynieryjno-Ekonomiczny Transportu, Akademia Morska w Szczecinie, w latach 2010-2012 Prodziekan ds. Studiów Niestacjonarnych
2002-2009	Asystent, Zakład Metod Ilościowych, Wydział Inżynieryjno-Ekonomiczny Transportu, Akademia Morska w Szczecinie

Profile naukowe:

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2246-1700
Web of Science, Researcher ID: Y-9912-2018
Scopus Author ID: 24481936400
Google Scholar: Marek Landowski

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.)

4a. Tytuł osiągnięcia naukowego

Wielowymiarowe podejście do definiowania zmiennych niepewnych, ich arytmetyki i zastosowań

4b. Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego, wg daty publikacji od najnowszej

Poniższy cykl publikacji powiązanych tematycznie zawiera 9 pozycji opublikowanych w latach 2013-2018. Prace te są opublikowane w czasopismach posiadających impact factor (3 samodzielne i 3 współautorskie artykuły) oraz w recenzowanych materiałach konferencyjnych indeksowanych przez Web of Science (3 samodzielne artykuły). Sumaryczny impact factor zgodnie z rokiem opublikowania artykułów wchodzących w skład cyklu osiągnięcia naukowego wynosi: **IF = 10.930**, natomiast impact factor pięcioletni wg JCR zgodnie z datą publikacji wynosi: **5yIF = 11.261**. Łączna **liczba punktów MNiSW** cyklu publikacji wynosi **205**, natomiast uwzględniając udział procentowy habilitanta **167.5 punktu MNiSW.**

[A1] **Marek Landowski**, 2018, Shadowed numbers and their standard and multidimensional arithmetic. Information Sciences, 1-18. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.11.047

IF_{2017} = 4.305, $5yIF_{2017}$ = 4.378, punkty MNiSW 45, udział habilitanta: 100%.

[A2] **Marek Landowski**, 2018, Method with horizontal fuzzy numbers for solving real fuzzy linear systems. Soft Computing, 1-13. DOI: https://doi.org/10.1007/s00500-018-3290-y

IF_{2017} = 2.367, $5yIF_{2017}$ = 2.204, punkty MNiSW 25, udział habilitanta: 100%.

[A3] **Marek Landowski**, 2018, A discussion on "On the solution of a class of fuzzy system of linear equations". Sadhana-Academy Proceedings in Engineering Sciences 43(12), 205, 1-5.

IF_{2017} = 0.592, $5yIF_{2017}$ = 0.786, punkty MNiSW 15, udział habilitanta: 100%.

[A4] **Marek Landowski**, 2018, Usage of RDM interval arithmetic for solving cubic interval equation. In: Kacprzyk J. et al. (eds), Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. EUSFLAT 2017, IWIFSGN 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 642. Springer, Cham, 382-391.

Publikacja indeksowana w **Web of Science, punkty MNiSW 15, udział habilitanta: 100%.**

[A5] Andrzej Piegat, **Marek Landowski**, 2017, Is an interval the right result of arithmetic operations on intervals? International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences 27(3), 575-590.

IF_{2017} = 1.694, $5yIF_{2017}$ = 1.712, punkty MNiSW 25, udział habilitanta: 50%.

[A6] **Marek Landowski**, 2017, Comparison of RDM complex interval arithmetic and rectangular complex arithmetic. In: Kobayashi S. et al. (eds), Hard and Soft Computing for Artificial Intelligence, Multimedia and Security. ACS 2016. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 534. Springer, Cham, 49-57.

Publikacja indeksowana w **Web of Science, punkty MNiSW 15, udział habilitanta: 100%.**

[A7] Andrzej Piegat, **Marek Landowski**, 2015, Horizontal membership function and examples of its applications. International Journal of Fuzzy Systems 17(1), 22-30.

IF_{2015} = 0.941, $5yIF_{2015}$ = 1.068, punkty MNiSW 25, udział habilitanta: 50%.

[A8] **Marek Landowski**, 2015, Differences between Moore and RDM interval arithmetic. In: Angelov P. et al. (eds) Intelligent Systems'2014. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 322. Springer, Cham, 331-340.

Publikacja indeksowana w **Web of Science, punkty MNiSW 15, udział habilitanta: 100%.**

[A9] Andrzej Piegat, **Marek Landowski**, 2013, Two interpretations of multidimensional RDM interval arithmetic - multiplication and division. International Journal of Fuzzy Systems 15(4), 488-496.

IF_{2013} = 1.031, $5yIF_{2013}$ = 1.113, punkty MNiSW 25, udział habilitanta: 50%.

4c. Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

4c.1. Wprowadzenie

W otaczającej nas rzeczywistości generowane dane najczęściej nie są wartościami precyzyjnymi. Wykorzystanie niepewnych parametrów i niepewnych danych jest bardzo istotne do opisu rzeczywistości w postaci modelu matematycznego. Nieprecyzyjne dane możemy przedstawić za pomocą zbiorów niepewnych, na przykład: interwał (Warmus [47], Sunaga [45], Moore [30]), zbiór rozmyty (Zadeh [49]), zbiór zacieniony (Pedrycz [34, 35]), zbiór intuicjonistyczny (Atanassov [1]). Dane, które nie są określone precyzyjnie wykorzystuje się między innymi w uncertainty theory [2], granular computing [37], grey systems [26] czy fuzzy systems [21, 36] na przykład w celu modelowania niepewnych systemów. W sztucznym myśleniu nie można wykonywać obliczeń na słowach jeżeli nie mamy dokładnej arytmetyki dla zbiorów niepewnych, ponieważ występuje tutaj dużo informacji w formie lingwistycznej i numerycznej. Konsekwencją określenia zbioru niepewnego było zdefiniowanie liczby niepewnej oraz wprowadzenie arytmetyki dla tej liczby. Powstawanie nowych arytmetyk niepewnościowych świadczy o tym, że zagadnienie to nie jest proste. Arytmetyka niepewnościowa jest w fazie rozwoju i nie została w pełni zidentyfikowana. Nie został opracowany jeszcze żaden opis, który by nie budził zastrzeżeń.

Istnieje wiele arytmetyk odnoszących się do liczb niepewnych. Dalej podano i w skrócie opisano przykłady arytmetyk odnoszących się do interwałów. W standardowej arytmetyce interwałowej (SIA, ang. standard interval arithmetic) Warmus, Sunaga, Moore [47, 45, 30], obliczenia wykonywane są na wartościach brzegowych interwałów, a wynik obliczeń ma formę interwału. W rozszerzonej arytmetyce interwałowej (EIA ang. extended interval arithmetic) [28], obliczenia wykonywane są na wartościach brzegowych interwałów, natomiast operacje te są uzależnione od funkcji, które charakteryzują interwał. Te funkcje to: rozpiętość, iloraz wartości brzegowych interwału oraz funkcja określająca czy interwał jest dodatni czy ujemny. Wynikiem tej arytmetyki jest również interwał. W kolejnej arytmetyce, generalized interval arithmetic (GIA) [15], interwał jest definiowany za pomocą wartości środkowej przedziału oraz wartości zawierających się w promieniu tego interwału. W distributive interval arithmetic (DIA) [32], aby spełnione zostało prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania zmodyfikowano zapis interwału. Zdefiniowano wartość absolutną przedziału za pomocą jego środka i promienia. Operacje wykonywane są w oparciu o te dwa wskaźniki. W affine interval arithmetic (AIA) [19], wartość przedziału jest wyrażona za pomocą wielomianu nazwanego affine expression. Wielomian ten składa się z wartości środkowej, zakłócenia $\varepsilon \in [-1,1]$ oraz współczynników zmiennoprzecinkowych.

Dla zbioru liczb rozmytych również podano wiele rodzajów arytmetyk. Arytmetyka rozmyta oparta na zasadzie rozszerzenia Zadeha [49, 50] pozwala rozszerzyć liczby rzeczywiste na wielkości rozmyte a operacje arytmetyczne na rozmyte argumenty [16, 19, 39]. Kolejna arytmetyka rozmyta jest oparta na α-przekrojach (α-cuts) i arytmetyce interwałowej, [16, 31, 37]. W tym przypadku istnieje wiele odmian tej arytmetyki, tak jak arytmetyk interwałowych. Bardzo popularną jest arytmetyka rozmyta oparta na standardowej arytmetyce interwałowej [45, 47, 30]. Arytmetyka constrained fuzzy arithmetic [20, 22], również bazuje na α-przekrojach liczb rozmytych, w odróżnieniu od standardowej arytmetyki uwzględnia wymagane ograniczenia pomiędzy liczbami rozmytymi [20]. W arytmetyce Left-Right (L-R) [6, 11, 12], liczby rozmyte zapisane są w formie parametrycznej. Forma prezentacji L-R liczb rozmytych pozwala na dużą różnorodność ich form, łatwość wykonywania podstawowych operacji arytmetycznych i interpretacji otrzymanych wyników. Arytmetyka rozmyta liczb skierowanych (ang. ordered fuzzy numbers arithmetic) [24], oparta jest na skierowanej liczbie rozmytej, która składa się z uporządkowanej pary funkcji z dodatkowym parametrem określającym kierunek.

W związku z tym, że większość arytmetyk interwałowych i rozmytych opiera się na obliczeniach wykonywanych na wartościach brzegowych liczb niepewnych, tak jak w przypadku standardowej arytmetyki interwałowej i jej odpowiednikowi rozmytej arytmetyki, habilitant w przeprowadzonych badaniach głównie koncentruje się na porównaniu swoich wyników ze standardową arytmetyką. W niektórych pracach wymienionych w cyklu wielowymiarowe podejście porównywane jest również z innymi metodami. Autorzy nowych rodzajów arytmetyk zwykle w swoich artykułach jako uzasadnienie ich wprowadzenia podają słabości standardowej arytmetyki interwałowej.

Standardowa arytmetyka interwałowa (SIA) jest najbardziej znana i najczęściej wykorzystywana w praktyce. Arytmetyka ta daje możliwość rozwiązania wielu problemów. Na przykład, wyznaczenie rozpiętości rozwiązania ze zmiennymi niepewnymi lub wyznaczenie granic błędów obliczeniowych. Ponadto, SIA znacznie przyczyniła się do rozwoju teorii niepewności. Popularność SIA wynika również z tego, że współgra z ludzką intuicją. Za pomocą SIA łatwo jest wykonywać obliczenia i zapamiętać wyniki.

Dalej zostaną przedstawione ograniczenia i wady z jakimi możemy się spotkać stosując standardowe podejście do arytmetyki interwałowej. Podobne ograniczenia i wady występują w arytmetyce rozmytej opartej na standardowym podejściu.

Ograniczenia i wady standardowej arytmetyki:

[1] Metody wykorzystujące arytmetykę interwałową dla elementarnych operacji arytmetycznych generują trafne rozwiązania. W przypadku bardziej skomplikowanych problemów można otrzymać błędne rezultaty. Wynik obliczeń może być niepoprawny, jeżeli interwał występuje w danych obliczeniach kilka razy oraz każde obliczenie jest wykonywane niezależnie. W takich przypadkach przedstawione arytmetyki generują rozwiązania, które są przeszacowane lub niedoszacowane. Na przykład, korzystając ze standardowej arytmetyki interwałowej rozwiążmy interwałowe równanie postaci $AX + B = AB$, gdzie $A = [1,2]$ oraz $B = [4,6]$. Zatem: $X = (AB - B)/A = ([1,2][4,6] - [4,6])/[1,2] = ([4,12] - [4,6])/[1,2] = [-2,8]/[1,2] = [-2,8]$. Otrzymany wynik jest przeszacowany i nie spełnia zadanego równania. Rozwiązaniem rozpatrywanego równania jest przedział $[0,3]$. Problem przeszacowania wyników SIA opisano między innymi w [4, 16, 33].

[2] Kolejną wadą arytmetyk interwałowych i arytmetyk rozmytych opartych na standardowej arytmetyce interwałowej, jest problem zależności (ang. dependency problem). Wykonując obliczenia na krańcach przedziałów wartość wyniku zależy od formy zapisu zadanej funkcji [7, 31, 43]. Interwałowe i rozmyte arytmetyki, w których operacje algebraiczne wykonywane są na wartościach brzegowych nie generują uniwersalnego rozwiązania. Na przykład, wykorzystując standardową arytmetykę interwałową dla $A = [0,2]$ obliczmy wartość funkcji $f(A) = A - A^2$ oraz wartości równoważnych form funkcji f takich jak: $f(A) = A(1 - A)$ lub $f(A) = (A - 1) + (1 - A)(1 + A)$. Zatem, odpowiednio otrzymujemy następujące wyniki: $f([0,2]) = [0,2] - ([0,2])^2 = [-4,2]$; $f([0,2]) = [0,2](1 - [0,2]) = [-2,2]$; $f([0,2]) = ([0,2] - 1) + (1 - [0,2])(1 + [0,2]) = [-4,4]$. Każda, równoważna forma zapisu generuje inną wartość funkcji f.

[3] Problem z rozwiązaniem prostego równania [25, 29]. Rozwiązując nawet proste równanie postaci $A + X = C$ za pomocą standardowego podejścia, możemy otrzymać różne rozwiązania. Wynik zależy od sposobu rozwiązania. Na przykład, rozwiążmy równanie w postaci: $[2,6] + X = [9,11]$. Sposób 1: $[2,6] + X = [9,11] \Longrightarrow X = [9,11] - [2,6] \Longrightarrow X = [3,9]$. Sposób 2: niech $X = [x_1, x_2]$, zatem $[2,6] + [x_1, x_2] = [9,11] \Longrightarrow [2 + x_1, 6 + x_2] = [9,11] \Longrightarrow 2 + x_1 = 9, 6 + x_2 = 11 \Longrightarrow x_1 = 7, x_2 = 5$, czyli $X = [7,5]$.

[4] Arytmetyka standardowa może wygenerować wynik w postaci interwału, gdzie początek jest większy niż koniec tego interwału. Przypadek taki pokazano w punkcie 3, sposób 2. Interwał taki jest nazwany jako niewłaściwy interwał (ang. improper interval) [40]. Interwały niewłaściwe nie są akceptowane przez niektórych naukowców, ponieważ nie są zgodne z definicją interwału i nie wiadomo jak je stosować w praktyce. Istotność niewłaściwego interwału jest dyskutowana w pracy [27].

[5] Niepożądaną własnością arytmetyki interwałowej opisaną w [7] jest szybki wzrost rozpiętości interwału (ang. the increasing entropy phenomenon) otrzymanego w wyniku wykonywanych operacji arytmetycznych na interwałach. Dymowa w [7] pisze, że opracowano kilka modyfikacji standardowej arytmetyki w celu wyeliminowania tego problemu, które dają dobre wyniki tylko w określonych warunkach.

[6] W standardowej arytmetyce interwałowej oraz bazującej na niej arytmetyce rozmytej nie istnieje element odwrotny dodawania i mnożenia z wyjątkiem zdegenerowanej liczby niepewnej oraz w ogólności nie zachodzi prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania (ang. full distributive law), [31].

Kolejną koncepcją modelowania niepewności, na której w swoich badaniach skupia się habilitant, jest zbiór zacieniony (ang. a shadowed set). Zbiory zacienione zaproponował Pedrycz [34, 35] jako przybliżenie zbiorów rozmytych. Natomiast Yao i in. w pracy [48] przedstawiają definicję zbioru zacienionego, który nie zależy od zbioru rozmytego. W tym przypadku motywacja powstania zbioru zacienionego jako uproszczenia zbioru rozmytego została pominięta. Grzegorzewski w pracy [13] przedstawia aproksymację liczby rozmytej w zbiór zacieniony za pomocą wzorów określających cztery punkty charakteryzujące zbiór zacieniony. Ponadto, Hryniewicz [17] oraz El Hawy i in. [8] wykorzystują zbiory zacienione do uproszczenia liczby rozmytej. Należy podkreślić, że do tej pory nie podano formalnej definicji liczby zacienionej ani nie określono arytmetyki tych liczb.

Obszar zainteresowań naukowych habilitanta skupia się na arytmetyce liczb niepewnych określonych za pomocą interwałów (ang. interval), liczb rozmytych (ang. fuzzy numbers) oraz liczb zacienionych (ang. shadowed numbers). Występujące ograniczenia i wady w standardowym niskowymiarowym podejściu do obliczeń na zmiennych niepewnych zmotywowało habilitanta do badań nad wielowymiarową zmienną niepewną jej arytmetyką i zastosowaniami.

Habilitant w swojej pracy naukowej analizuje i rozszerza wielowymiarową interwałową arytmetykę RDM (ang. relative distance measure interval arithmetic (RDMIA)). Koncepcję wielowymiarowej arytmetyki RDMIA zaproponował A. Piegat. Pierwszy artykuł dotyczący wielowymiarowej RDMIA autorstwa Piegat i Landowski [B6] został opublikowany w 2012 roku. Samodzielne i współautorskie publikacje habilitanta przedstawione w powiązanym tematycznie cyklu pokazują, że wielowymiarowe podejście do liczb niepewnych jest wolne od wielu ograniczeń i błędów charakterystycznych dla standardowego podejścia.

Główny cel badań habilitanta to analiza wielowymiarowej interwałowej arytmetyki RDM oraz rozszerzenie tego podejścia do definiowania zmiennych niepewnych i ich arytmetyk na przestrzeń zbiorów rozmytych i zacienionych.

Powiązany tematycznie cykl publikacji przedstawiony jako osiągnięcie naukowe habilitanta skupia się na analizie i rozwoju wielowymiarowego podejścia do zmiennych niepewnych w postaci interwałów, liczb rozmytych i liczb zacienionych oraz przedstawienia wielowymiarowych arytmetyk dla zmiennych niepewnych i ich zastosowań. Ponadto, w przedstawionych artykułach pokazano różnice pomiędzy podejściem wielowymiarowym a niskowymiarowym do precyzowania niepewności.

Cykl publikacji można podzielić na trzy części. Pierwsza część dotyczy wielowymiarowego podejścia do arytmetyki na interwałach [A4, A5, A6, A8, A9], druga część opisuje arytmetykę liczb rozmytych [A2, A3, A7], natomiast trzecia przedstawia liczby zacienione i ich arytmetyki [A1].

W dalszej części zostaną opisane cele naukowe oraz główne osiągnięcia naukowe w postaci innowacji i nowości naukowych przedstawionych w cyklu publikacji.

4c.2. Wielowymiarowe podejście do interwałów i ich arytmetyka

Naukowcy na całym świecie od wielu lat zajmują się interwałową formą prezentacji niepewności i powstają różne formy zapisu i obliczeń na interwałach. Interwał i jego arytmetyka pełnią ważną rolę w procesie modelowania niepewności. Najbardziej popularna standardowa arytmetyka interwałowa (ang. standard interval arithmetic (SIA)) posiada wady i ograniczenia opisane we wprowadzeniu.

Wielowymiarowa arytmetyka interwałowa nazwana relative distance measure interval arithmetic (RDMIA) pozbawiona jest wielu wad, które posiada standardowe podejście do obliczeń na interwałach. Oznaczmy przedział X jako $[\underline{x},\overline{x}]$, gdzie $\underline{x}$ jest dolną granicą przedziału, natomiast $\overline{x}$ jest górną granicą przedziału. Podstawą wielowymiarowej arytmetyki RDMIA jest wprowadzenie zmiennej RDM, najczęściej oznaczanej jako α_x, gdzie $\alpha_x \in [0,1]$. Dowolna wartość x należąca do przedziału $X = [\underline{x},\overline{x}]$ jest wyrażona za pomocą zmiennej RDM α_x, [A9, A5], w postaci:

$$x = \underline{x} + \alpha_x(\overline{x} - \underline{x}), \alpha_x \in [0,1].$$

Publikacje wykazane przez habilitanta w cyklu [A4, A5, A6, A8, A9] przedstawiają rozwój i zastosowania wielowymiarowej arytmetyki RDMIA.

Celem artykułu [A9] jest wprowadzenie dwóch możliwych interpretacji interwałów w ramach wielowymiarowej arytmetyki RDMIA, podejścia posybilistycznego i probabilistycznego oraz określenie działań mnożenia i dzielenia na interwałach.

W podejściu posybilistycznym nie ma postawionych warunków dotyczących interwałów. Ma ono istotne znaczenie do rozwoju obliczeń na liczbach rozmytych, na przykład wykorzystując RDMIA i metodę α-cięć. Drugie podejście probabilistyczne wymaga wiedzy o gęstości rozkładu prawdopodobieństwa lub też założenia wstępnego odnoszącego się do funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

W pracy [A9] wskazano różnice w interpretacji wyników otrzymanych w standardowym podejściu oraz w podejściu wielowymiarowym.

Dla posybilistycznej interpretacji przedstawiono wynik operacji mnożenia $[x] = [a][b]$ interwałów jako miarę bezwzględnych możliwości ($AbsPoss$) wystąpienia pojedynczej wartości wynikowej, która przedstawia rozkład rozpiętości dla pojedynczych wartości wyniku mnożenia. Miarę bezwzględnych możliwości wystąpienia wartości $x = ab$, gdzie $x \in [x]$, $a \in [a]$ i $b \in [b]$, określono za pomocą funkcji $L(x)$ wyznaczającej długość konturów występujących w wyniku otrzymanym wielowymiarową arytmetyką RDMIA. Dodatkowo określono względną możliwość $RelPoss$ wystąpienia pojedynczej wartości $x = ab$. $RelPoss$ jest znormalizowaną miarą $AbsPoss$.

W probabilistycznej wersji mnożenia interwałów zakładamy różne formy gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wejściowych zmiennych niepewnych w postaci interwału i znajdujemy rozwiązanie przy tym założeniu. Wynik jest możliwy tyko przy założeniu określonej wcześniej funkcji gęstości prawdopodobieństwa. W przedstawionej analizie [A9] dla przykładu jako jedną z możliwych form gęstości rozkładu dla zmiennych przyjęto równomierną funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Wykonując działanie $[a][b] = [x]$ jako bezpośredni wynik dla podejścia probabilistycznego metodą RDMIA otrzymujemy granule informacji składającą się z nieskończonej liczby rozwiązań. Bezpośrednie rozwiązanie można przedstawić za pomocą rozwiązania wtórnego będącego funkcją gęstości prawdopodobieństwa wyniku działania na interwałach.

W [A9] autorzy wyprowadzają wzory na wtórne rozwiązania iloczynu interwałów $[a][b] = [x]$ dla wersji posybilistycznej i probabilistycznej w przypadku gdy $[a] > 0$, $[b] > 0$, pozostałe przypadki otrzymuje się analogicznie. W artykule pokazano, że możliwe są dwie interpretacje działań na interwałach. Podejścia posybilistyczne i probabilistyczne są bardzo istotną kwestią ze względu na rozwój teorii niepewności oraz teorii prawdopodobieństwa. Kandel, Martins, Pacheco [18] i Zadeh [51] piszą, że teoria zbiorów rozmytych (posybilistyczna) oraz teoria prawdopodobieństwa wzajemnie się uzupełniają, modelują różne pod względem semantyki pojęcia zatem mogą działać razem.

Kolejną pracą odnoszącą się do wielowymiarowej interwałowej arytmetyki RDM przedstawioną w cyklu jest artykuł [A8]. **Celem tego artykułu jest określenie własności działań wielowymiarowej arytmetyki RDMIA oraz porównanie tej arytmetyki ze standardową arytmetyką interwałową (SIA).**

Warto podkreślić, że publikacja habilitanta [A8] jest materiałem konferencyjnym międzynarodowej konferencji 7th IEEE International Conference on Intelligent Systems (IEEE IS). Konferencja ta znajduje się w bazie CORE (The Computing Research and Education Association of Australasia, http://www.core.edu.au/).

W pracy [A8, A4] habilitant sprecyzował definicję interwałowej liczby niepewnej w odniesieniu do wielowymiarowej arytmetyki RDMIA, określając interwał w postaci zbioru wartości wyrażonych za pomocą zmiennej RDM. Definicję przedstawiono poniżej.

Definicja 1 (Landowski [A8, A4]) Niepewna liczba przedstawiona w formie interwału $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ w notacji RDM jest zapisana jako zbiór możliwych wartości x:

$$X = \{x \in R: x = \underline{x} + \alpha_x(\overline{x} - \underline{x}), \alpha_x \in [0,1]\}.$$

Ponadto, w [A8] habilitant porównał arytmetykę standardową zaproponowaną przez Moore'a z wielowymiarową arytmetyką RDMIA poprzez analizę własności algebraicznych podstawowych operacji oraz przedstawione przykłady. Badania wykazały, że w wielowymiarowej arytmetyce RDMIA zachodzą następujące podstawowe własności algebraiczne: przemienność i łączność dodawania i mnożenia, prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania oraz prawo anulacji dla dodawania i istnieją element neutralny i element odwrotny dla dodawania i mnożenia. Dodatkowo pokazano, że w arytmetyce standardowej Moore'a nie istnieją elementy odwrotne dodawania i mnożenia (z wyjątkiem zdegenerowanych interwałów) oraz, że nie zachodzi w pełni prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania. Na przykładach pokazano jak wykonywać podstawowe operacje w RDMIA oraz różnice w wynikach otrzymanych arytmetyką standardową i wielowymiarową RDMIA. Dodatkowo, na przykładzie pokazano, że rezultaty standardowej arytmetyki w postaci interwałów to wskaźniki dokładnego rozwiązania jakie generuje wielowymiarowe podejście do interwału. Jak również pokazano, że wynik otrzymany arytmetyką wielowymiarową RDMIA nie zależy od formy zapisu funkcji, natomiast w SIA wynik jest uzależniony od formy zapisu funkcji.

Następnym artykułem przedstawionym w cyklu publikacji jest artykuł [A4] będący materiałem konferencyjnym z międzynarodowej konferencji 10th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT).

Celem pracy [A4] jest pokazanie możliwości rozszerzenia teorii określonej w przestrzeni liczb precyzyjnych do przestrzeni liczb niepewnych z wykorzystaniem RDMIA generującej precyzyjne wielowymiarowe rozwiązanie.

Cel został zrealizowany poprzez rozszerzenie teorii rozwiązywania równań sześciennych, określonej dla zbioru liczb precyzyjnych, na przestrzeń interwałów wykorzystując wielowymiarową arytmetykę RDMIA. Habilitant zaproponował zastosowanie wielowymiarowej arytmetyki RDM do rozwiązywania sześciennych równań ze współczynnikami w formie interwału, czyli równań w postaci $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, gdzie $A = [\underline{a}, \overline{a}]$, $B = [\underline{b}, \overline{b}]$, $C = [\underline{c}, \overline{c}]$, D= $[\underline{d}, \overline{d}]$ i $0 \notin A$. Wykorzystując wzory Cardano, które zostały wyprowadzone dla liczb precyzyjnie określonych opracowano ich rozszerzenie na zbiór interwałów. Na przykładach przedstawiono zastosowanie przytoczonej teorii oraz wskazano wyższość podejścia wielowymiarowego RDMIA nad niskowymiarowym SIA. Oprócz przykładów, gdzie rozwiązano równania sześcienne podano również przykład obliczeniowy wskazujący najkrótszą odległość od rozmytego punktu do paraboli.

Kolejnym istotnym krokiem w badaniach na wielowymiarowym podejściem do precyzowania niepewności za pomocą interwału było rozszerzenie wielowymiarowej arytmetyki RDMIA na zbiór zespolony [A6].

Celem artykułu [A6] jest zdefiniowanie w zbiorze liczb zespolonych wielowymiarowej interwałowej liczby zespolonej oraz określenie dla tej liczby wielowymiarowej arytmetyki.

W pracy [A6] habilitant interwałową liczbę zespoloną $Z = A + iB = [\underline{a}, \overline{a}] + i[\underline{b}, \overline{b}]$ zdefiniował w notacji RDM jako zbiór w postaci:

$$Z = \{a + ib : a + ib = \underline{a} + \alpha_a(\overline{a} - \underline{a}) + i[\underline{b} + \alpha_b(\overline{b} - \underline{b})], \alpha_a, \alpha_b \in [0,1]\}$$

Dla zdefiniowanej interwałowej liczby zespolonej habilitant określił wielowymiarową zespoloną interwałową arytmetykę RDM (ang. complex RDM interval arithmetic (C-RDMIA)). W ramach przedstawionej wielowymiarowej arytmetyki C-RDMIA podał wzory na podstawowe operacje algebraiczne $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Dodatkowo habilitant zdefiniował rozpiętość (ang. span) rozwiązania bezpośredniego dla wielowymiarowej zespolonej arytmetyki RDM, jak poniżej.

Dla interwałowych liczb zespolonych $Z_1 = A + iB$ oraz $Z_2 = C + iD$ i podstawowych operacji arytmetycznych $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ rozpiętość wynikowej interwałowej liczby zespolonej definiujemy jak poniżej, operacja / jest określona jeżeli $0 \notin Z_2$,

$$span\,(Z_1 * Z_2) = [\min\{Re(Z_1 * Z_2)\}, \max\{Re(Z_1 * Z_2)\}] + i[\min\{Im(Z_1 * Z_2)\}, \max\{Im(Z_1 * Z_2)\}].$$

Zaproponowaną przez habilitanta wielowymiarową arytmetykę C-RDMIA w [A6] porównano ze znaną prostokątną arytmetyką zespoloną (ang. rectangular complex arithmetic (RCA), inna nazwa: complex interval arithmetic (CIA)) [23, 38, 41].

Dla arytmetyk C-RDMIA oraz RCA habilitant zbadał podstawowe własności arytmetyczne, podobnie jak w wielowymiarowej arytmetyce RDMIA. Dodatkowo przeanalizował dwie własności dla interwałowej liczby zespolonej sprzężonej, czyli dla dowolnej interwałowej liczby zespolonej $Z = A + iB$ sprawdził w arytmetyce C-RDMIA i RCA prawdziwość równań: $Z + \overline{Z} = 2A$ oraz $Z\overline{Z} = A^2 - B^2$. Habilitant udowodnił, że własności te zachodzą dla wielowymiarowej C-RDMIA oraz pokazał, że w RCA zachodzą tylko dla zdegenerowanych liczb zespolonych.

Przedstawione w [A6] przykłady pokazują, że dla równoważnych form zapisu funkcji arytmetyka RCA generuje różne wyniki. Wada ta nie występuje w wielowymiarowej arytmetyce C-RDMIA. Dodatkowo rozwiązano za pomocą dwóch arytmetyk zespolone równanie postaci $ZX = C$. W RCA przy różnych sposobach rozwiązania otrzymujemy różne wyniki, w arytmetyce C-RDMIA dla różnych sposobów rozwiązania otrzymujemy takie same wyniki. Wielowymiarowe rozwiązania otrzymane arytmetyką C-RDMIA przedstawiono również w formie graficznej.

Ostatnią pozycją wymienioną w cyklu dotyczącą wielowymiarowej arytmetyki RDMIA jest współautorski artykuł [A5]. **Celem tego artykułu jest pokazanie, że pełnym, bezpośrednim wynikiem operacji arytmetycznych na interwałach nie jest interwał tylko wielowymiarowa granula informacji.**

W [A5] autorzy szczegółowo przedstawiają metodologię obliczeń oraz interpretację wyników dla precyzyjnej wielowymiarowej arytmetyki RDMIA. Pokazano, że interwał jest tylko jednym ze wskaźników (reprezentantem) bezpośredniego rozwiązania problemu ze zmiennymi interwałowymi. Wynik w postaci interwału dostarcza uproszczoną informację o rozpiętości wynikowej wielowymiarowej granuli informacji. Jeżeli dwie wielowymiarowe granule są różne, to ich wskaźnik w postaci rozpiętości rozwiązania (interwał) może być taki sam. W przestrzeni interwałowej takie rozwiązanie nie jest rozróżnialne. Stosowanie interwału jako bezpośredniego rozwiązania prowadzi do utraty informacji i specyfiki rozwiązania. Rozwiązanie dokładne jest wielowymiarowe. Autorzy pokazali, że bezpośrednie rozwiązanie w postaci wielowymiarowej granuli informacji może być reprezentowane nie tylko przez interwał ale również może być wyrażone za pomocą takich wskaźników jak rozkład miary liczności lub środek ciężkości.

Wykonywanie obliczeń bezpośrednio na interwałach przy bardziej skomplikowanych operacjach może prowadzić do nieakceptowalnych wyników. W artykule [A5] pokazano, że przedstawiona metodologia wielowymiarowych obliczeń arytmetycznych na interwałach oraz rozwiązywania równań interwałowych daje precyzyjne wielowymiarowe rozwiązanie.

4c.3. Wielowymiarowe podejście do liczb rozmytych i ich arytmetyka

Wielowymiarowe podejście RDM do arytmetyki interwałów zostało rozszerzone na zbiór rozmyty. W pracy [A7] przedstawionej w cyklu autorzy proponują horyzontalną funkcję przynależności, która wprowadza wielowymiarowość do arytmetyki zbiorów rozmytych.

Celem artykułu [A7] jest przedstawienie horyzontalnej funkcji przynależności zbioru rozmytego oraz jej zastosowanie do rozwiązania problemu algebraicznego i do obliczeń na słowach.

Praca [A7] jest pierwszą, w której przedstawiono horyzontalne podejście w teorii zbiorów rozmytych. Dotychczas funkcję przynależności μ określano w sposób wertykalny (pionowo) jako przyporządkowanie $\mu: X \to [0,1]$. W horyzontalnym podejściu wartość $x = f(\mu, \alpha_x)$, gdzie $\mu, \alpha_x \in [0,1]$. Wielowymiarowe, horyzontalne podejście do funkcji przynależności to przyporządkowanie $f: [0,1] \times [0,1] \to X$. W [A7] zaproponowano trapezoidalną funkcję przynależności $X = (a, b, c, d)$, gdzie $a \le b \le c \le d$ oraz $a, b, c, d \in R$, w postaci horyzontalnej, jako:

$$x = [a + (b - a)\mu] + [(d - a) - \mu(b + d - a - c)]\alpha_x,$$

gdzie $\mu, \alpha_x \in [0,1]$.

W artykule [A7] pokazano zastosowanie horyzontalnej funkcji przynależności do wyznaczenia wartości funkcji. Dla otrzymanej granuli informacji wyznaczono rozpiętość w postaci wertykalnej funkcji przynależności. Następnie zastosowano horyzontalną funkcję przynależności do rozwiązania problemu postawionego przez Zadeha pt. „Tall Swedes". Możliwość obliczeń na słowach (ang. computing with words (CWW)) (Zadeh [52, 53]), jest bardzo istotnym zagadnieniem w teorii sztucznej inteligencji oraz sztucznego myślenia. CWW pozwala na rozwiązywanie problemów, w których informacje o zmiennych są podane w formie lingwistycznej i numerycznej.

Kolejnymi istotnymi artykułami dotyczącymi wielowymiarowego, horyzontalnego podejścia do zbiorów rozmytych są artykuły [A2] i [A3].

Celem artykułu [A2] jest podanie metody wykorzystującej horyzontalną liczbę rozmytą, która generuje precyzyjne rozwiązywanie rozmytego układu równań liniowych.

Dla osiągnięcia postawionego celu w [A2] habilitant podał ogólną definicję horyzontalnej liczby rozmytej (ang. horiozontal fuzzy number (HFN)) z liniowymi i nieliniowymi brzegami.

Definicja 2 (Landowski [A2], Definicja 3). Horyzontalna liczba rozmyta U^r parametrycznej liczby rozmytej $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ jest zbiorem liczb u^r dla każdego $r, \alpha_u \in [0,1]$, określonym jako:

$$U^r = \{u^r \in R: u^r = \underline{u}(r) + \alpha_u(\overline{u}(r) - \underline{u}(r)), r, \alpha_u \in [0,1]\}.$$

Horyzontalną liczbę rozmytą U^r możemy również zapisać jako $u(r, \alpha_u) = \underline{u}(r) + \alpha_u(\overline{u}(r) - \underline{u}(r))$, gdzie $r, \alpha_u \in [0,1]$. Dla zdefiniowanej horyzontalnej liczby rozmytej habilitant określił podstawowe operacje arytmetyczne na tych liczbach oraz podał definicję rozwiązania bezpośredniego.

Definicja 3 (Landowski [A2], Definicja 4). (Rozwiązanie bezpośrednie). Rozwiązanie bezpośrednie operacji na n horyzontalnych liczbach rozmytych $u_1(r, \alpha_{u1}), \ldots, u_n(r, \alpha_{un})$, gdzie $r, \alpha_{u1}, \ldots, \alpha_{un} \in [0,1]$, jest zbiorem liczb wyrażonych za pomocą wielowymiarowej formuły $Z^r = z(r, \alpha_{u1}, \ldots, \alpha_{un})$ z co najwyżej n zmiennymi $r, \alpha_{u1}, \ldots, \alpha_{un} \in [0,1]$.

Dodatkowo, dla przedstawienia bezpośredniego rozwiązania, które jest wielowymiarową granulą informacji, habilitant zdefiniował wskaźnik w postaci standardowej liczby rozmytej będący rozpiętością rozwiązania bezpośredniego. Ponadto, habilitant w [A2] udowodnił podstawowe własności dla operacji algebraicznych na horyzontalnych liczbach rozmytych (HFN).

Dla znalezienia rozwiązania rozmytego układu równań habilitant podał metodę wykorzystującą horyzontalną liczbę rozmytą. W artykule [A2] podano 5 przykładów, w których obliczono precyzyjne rozwiązania rozmytych układów równań w postaci wielowymiarowej granuli informacji oraz podano rozpiętości tych rozwiązań jako standardowe liczby rozmyte. Dla wykazania, że bezpośrednie rozwiązania spełniają zadane rozmyte układy równań przeprowadzono odpowiednie dowody. Dodatkowo, otrzymane rozwiązania porównano z rozwiązaniami otrzymanymi w cytowanych artykułach. Habilitant wykazał, że wyniki otrzymane innymi metodami w cytowanych artykułach nie są poprawne, są rozwiązaniami niepełnymi lub przeszacowanymi. Dla pokazania zastosowania proponowanej metody podano praktyczny przykład z rozmytym układem równań oraz rozwiązano układ równań liniowych z rozmytymi liczbami o nieliniowych brzegach. Ponadto pokazano, że za pomocą metody z horyzontalną liczbą rozmytą możliwe jest wygenerowanie każdego precyzyjnego rozwiązania na podstawie wielowymiarowej granuli informacji oraz korespondującego z tym rozwiązaniem precyzyjnego układu równań liniowych.

Rozwinięciem artykułu [A2] poprzez zastosowanie przedstawionej w [A2] teorii jest artykuł [A3]. **Celem pracy [A3] jest pokazanie, w jaki sposób za pomocą metody z horyzontalną liczbą rozmytą można wygenerować rozwiązanie rozmytego układu równań, które wykaże niedoszacowanie lub przeszacowanie wyników otrzymanych inną metodą.**

W [A2] dla rozpatrywanych rozmytych układów równań za pomocą metody z horyzontalną liczbą rozmytą habilitant znalazł rozwiązanie w postaci wielowymiarowej granuli informacji, na podstawie której wygenerował precyzyjne rozwiązanie wraz z odpowiadającym mu układem równań. Wygenerowane rozwiązanie nie znajdowało się w rozwiązaniu przedstawionym w cytowanym artykule [42], natomiast współczynniki precyzyjnego układu równań zawierały się w zbiorach rozmytych będących współczynnikami rozpatrywanego rozmytego układu równań. W taki sposób habilitant wykazał, że wyniki przedstawione w [42] nie są pełnymi rozwiązaniami. Ponadto habilitant wykazał, że wyniki w [42] nie spełniają równoważnych form rozważanych rozmytych układów równań.

4c.4. Wielowymiarowe podejście do liczb zacienionych i ich arytmetyka

Zbiór zacieniony (ang. shadowed set) został zaproponowany przez Pedrycza [34, 35] jako uproszczenie zbioru rozmytego. Zbiór zacieniony S określony na przestrzeni X jest mapującym zbiorem wartości takim, że $S: X \rightarrow \{0, [0,1], 1\}$. W artykule [A1] habilitant rozszerzył teorię zbiorów zacienionych wprowadzając szereg nowych definicji, między innymi podając formalne pojęcia liczby zacienionej i jej arytmetykę w postaci standardowej i wielowymiarowej.

Motywacją habilitanta do napisania artykułu [A1] był fakt, że wcześniej nie określono arytmetyki dla liczb zacienionych, która mogłaby być wykorzystana między innymi w teorii obliczeń granularnych lub teorii three-way decisions.

Celem pracy [A1] jest zdefiniowanie liczby w teorii zbiorów zacienionych i określenie intuicyjnej oraz precyzyjnej arytmetyki dla tej liczby.

Innowacje występujące w [A1] to podanie definicji liczby zacienionej (ang. shadowed number) i liczby rozmytej zacienionej (ang. shadowed fuzzy number). W [A1] określono arytmetyki dla wyżej wymienionych liczb: standardową arytmetykę zacienioną (ang. standard shadowed arithmetic (SSA)) oraz wielowymiarową arytmetykę zacienioną RDM (ang. multidimensional RDM shadowed arithmetic (RDMSA)). Ponadto, habilitant jako pierwszy zajął się problemami algebraicznymi w przestrzeni liczb zacienionych. Nie znaleziono w literaturze naukowej pozycji, która rozwiązywałaby tego typu zagadnienia. Problemy te są istotne ze względu na rozwój teorii niepewności, teorii obliczeń granularnych, teorii podejmowania decyzji w szczególności teorii three-way decisions oraz sztucznej inteligencji. Potrzebne jest określenie w teorii zbiorów zacienionych liczby oraz jej arytmetyki, ponieważ: po pierwsze, zbiór zacieniony jest uproszczeniem zbioru rozmytego Pedrycz [34, 35]; po drugie, zbiór zacieniony może być pojmowany jako kolejna możliwość przedstawienia niepewności Yao i in. [48]; po trzecie, zbiór zacieniony można również traktować jako szczególny przypadek niepewności zbioru rozmytego typu-2 ze stałymi wartościami brzegowymi.

W dalszej części w skrócie zostanie przedstawiona teoria liczb zacienionych zaproponowana przez habilitanta i opublikowana w [A1].

Definicja 4 (Landowski [A1], Definicja 3) (Liczba zacieniona). Liczba zacieniona S jest zbiorem zacienionym S na przestrzeni rzeczywistej R, to jest, S jest mapującym zbiorem wartości $S: R \rightarrow \{0, [0,1], 1\}$, składającym się z czterech punktów (x_1, x_2, x_3, x_4), gdzie $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ oraz $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$. Stopień przynależności do liczby zacienionej jest równy 1 dla wartości od x_2 do x_3, jest równa 0 dla wartości mniejszych lub równych x_1 i dla wartości większych lub równych x_4, jest interwałem [0,1] dla wartości pomiędzy x_1 a x_2 oraz dla wartości pomiędzy x_3 a x_4.

Definicja 5 (Landowski [A1], Definicja 4) (Rozmyta liczba zacieniona). Rozmyta liczba zacieniona S_A jest liczbą zacienioną S otrzymaną ze zbioru rozmytego A jak następuje: S_A składa się z czterech punktów (x_1, x_2, x_3, x_4), gdzie $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ oraz $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$, takich, że $x_1 = A_L(\alpha_0)$, $x_2 = A_L(\beta_0)$, $x_3 = A_U(\beta_0)$ i $x_4 = A_U(\alpha_0)$, gdzie (α_0, β_0) jest parą wartości progowych, $0 \leq \alpha_0 < \beta_0 \leq 1$.

Funkcje $A_L(\alpha)$ oraz $A_U(\alpha)$ odnoszą się do parametrycznej definicji liczby rozmytej podanej w [10], gdzie liczba rozmyta A jest uporządkowaną parą funkcji $(A_L(\alpha), A_U(\alpha))$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Para wartości progowych (α_0, β_0) służy do generowania liczby zacienionej z danej liczby rozmytej, proces ten opisano między innymi w [34, 35, 13, 46, 48].

Rozmyta liczba zacieniona jest specjalnym typem liczby zacienionej dlatego w dalszej części termin „liczba zacieniona" będzie odnosił się do tych dwóch typów liczb.

Habilitant w [A1] określił również zdegenerowaną liczbę zacienioną (ang. degenerate shadowed number). Liczba zacieniona $S = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ jest zdegenerowaną liczbą zacienioną jeżeli $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Zdegenerowana liczba zacieniona $S = (x, x, x, x)$ może być identyfikowana z liczbą rzeczywistą x i zapisana jako $x = (x, x, x, x)$.

Dodatkowo dla liczby zacienionej habilitant zdefiniował jądro (ang. core), cień (ang. shadow) i wsparcie (ang. support).

Definicja 6 (Landowski [A1], Definicja 5) (Jądro). Jądrem liczby zacienionej $S = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ jest zbiór

$$core(S) = \{x \in R: x_2 \leq x \leq x_3\}$$

Definicja 7 (Landowski [A1], Definicja 6) (Cień). Dolny i górny cień liczby zacienionej $S = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ są zbiorami odpowiednio $sh_L(S)$ i $sh_U(S)$, określonymi jako

$$sh_L(S) = \{x \in R: x_1 < x < x_2\}$$

$$sh_U(S) = \{x \in R: x_3 < x < x_4\}$$

Definicja 8 (Landowski [A1], Definicja 7) (Wsparcie) Wsparciem liczby zacienionej $S = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ jest zbiór $supp(S)$ określony jako:

$$supp(S) = \{x \in R: x_1 \leq x \leq x_4\}$$

Na podstawie stałej wartości progowej $\alpha_0 = \sqrt{2} - 1$ (Pedrycz [34]) dla trójkątnej liczby rozmytej, Landowski w [A1] podał wzory na liczby zacienione wygenerowane z trójkątnej liczby rozmytej $A_1 = (a + (b-a)\alpha, c + (b-c)\alpha)$ oraz trapezowej liczby rozmytej $A_2 = (a + (b-a)\alpha, d + (c-d)\alpha)$. Są one odpowiednio postaci:

$$S_{A_1} = (\, a + (b-a)\alpha_0, a + (b-a)(1-\alpha_0), c - (c-b)(1-\alpha_0), c - (c-b)\alpha_0)$$

$$S_{A_2} = (\, a + (b-a)\alpha_0, a + (b-a)(1-\alpha_0), d - (d-c)(1-\alpha_0), d - (d-c)\alpha_0)$$

Dla zdefiniowanej liczby zacienionej Landowski w [A1] określił standardową arytmetykę zacienioną (ang. standard shadowed arithmetic (SSA)).

Definicja 9 (Landowski [A1], Definicja 8) (Standardowa arytmetyka zacieniona). Podstawowe operacje na liczbach zacienionych $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ i $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ definiujemy za pomocą poniższych wzorów:

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

$$X - Y = (x_1 - y_4, x_2 - y_3, x_3 - y_2, x_4 - y_1)$$

$$XY = (\min U, \min V, \max V, \min U)$$

$$X/Y = (x_1, x_2, x_3, x_4)(1/y_4, 1/y_3, 1/y_2, 1/y_1), \text{ jeżeli } 0 \notin Y$$

gdzie $U = \{x_1y_1, x_1y_4, x_4y_1, x_4y_4\}$, $V = \{x_2y_2, x_2y_3, x_3y_2, x_3y_3\}$.

Wynikiem operacji arytmetycznych na liczbach zacienionych w SSA jest liczba zacieniona. W [A1] habilitant określił również, kiedy dwie liczby zacienione w SSA są równe.

W SSA, dwie liczby zacienione $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ i $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ są równe jeżeli ich korespondujące punkty są równe, tj.:

$X = Y$ jeżeli $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$ i $x_3 = y_3$ i $x_4 + y_4$.

Równości liczb zacienionych nie należy utożsamiać z równością liczb dokładnych, które są reprezentowane przez te liczby zacienione. Liczby zacienione są tylko informacją o liczbach dokładnych, nie oznacza to, że dokładne liczby też są równe.

Na podstawie wielowymiarowej arytmetyki interwałowej RDMIA, habilitant zdefiniował wielowymiarowe cienie RDM liczby zacienionej.

Definicja 10 (Landowski [A1], Definicja 9) (Cienie RDM) Cień dolny $sh_L(S)$ i cień górny $sh_U(S)$ liczby zacienionej $S = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ w notacji RDM definiujemy jako zbiory odpowiednio wartości s_L i s_U, za pomocą zmiennych $r_L \in [0,1]$ i $r_U \in [0,1]$, jak następuje:

$$sh_L(S) = \{s_L : s_L = x_1 + r_L(x_2 - x_1), r_L \in [0,1]\}$$

$$sh_U(S) = \{s_U : s_U = x_3 + r_U(x_4 - x_3), r_U \in [0,1]\}$$

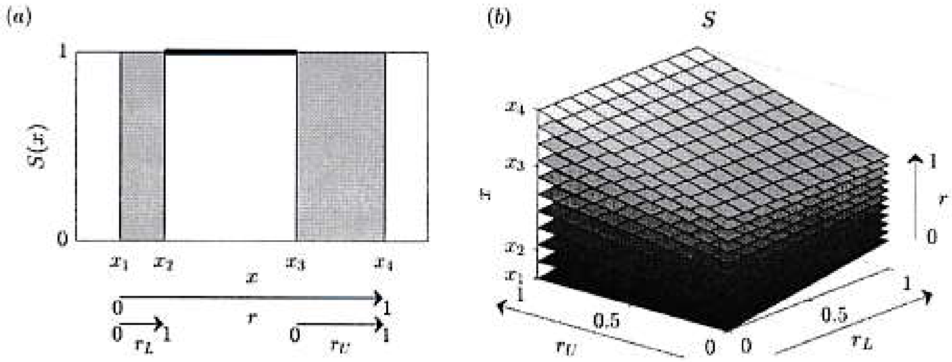
Dalej w [A1] habilitant określił wielowymiarową liczbę zacienioną RDM.

Definicja 11 (Landowski [A1], Definicja 10) (Wielowymiarowa liczba zacieniona RDM). Liczba zacieniona $S = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ w notacji RDM jest definiowana jako zbiór wartości s, tj.:

$$S = \{s : s = s_L + r(s_U - s_L) = x_1 + r_L(x_2 - x_1) + r[x_3 - x_1 + r_U(x_4 - x_3) - r_L(x_2 - x_1)], \\ r, r_L, r_U \in [0,1]\}$$

gdzie s_L i s_U są odpowiednio wartościami dolnego i górnego cienia.

Dla zobrazowania różnicy w podejściu standardowym i wielowymiarowym na rys. 1 przedstawiono graficznie standardową i wielowymiarową postać liczby zacienionej $S = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.



Rys. 1. Liczba zacieniona $S = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ w postaci standardowej, $r, r_L, r_U \in [0,1]$ Rys. 1a i w postaci wielowymiarowej, gdzie $r_L, r_U \in [0,1]$, $r \in [0{:}\,0.1{:}\,1]$ Rys. 1b.
Źródło: Landowski [A1].

Dla zdefiniowanej wielowymiarowej liczby zacienionej RDM habilitant zaproponował wielowymiarową zacienioną arytmetykę RDM (ang. multidimensional RDM shadowed arithmetic (RDMSA)).

Definicja 12 (Landowski [A1], Definicja 11) (Wielowymiarowa zacieniona arytmetyka RDM). Dla liczb zacienionych $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ i $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ zapisanych w notacji RDM jako zbiory $X = \{x : x = x_1 + r_{xL}(x_2 - x_1) + r_x[x_3 - x_1 + r_{xU}(x_4 - x_3) - r_{xL}(x_2 - x_1)], r_x, r_{xL}, r_{xU} \in [0,1]\}$ i $Y = \{y : y = y_1 + r_{yL}(y_2 - y_1) + r_y[y_3 - y_1 + r_{yU}(y_4 - y_3) - r_{yL}(y_2 - y_1)], r_y, r_{yL}, r_{yU} \in [0,1]\}$, cztery podstawowe operacje $\odot \in \{+, -, \cdot, /\}$ definiujemy za pomocą wzoru (operacja / zachodzi tylko jeżeli $0 \notin Y$):

$$X \odot Y = \{x \odot y : x \odot y = [x_1 + r_{xL}(x_2 - x_1) + r_x[x_3 - x_1 + r_{xU}(x_4 - x_3) - r_{xL}(x_2 - x_1)]] \\ \odot [y_1 + r_{yL}(y_2 - y_1) + r_y[y_3 - y_1 + r_{yU}(y_4 - y_3) - r_{yL}(y_2 - y_1)]], r_x, r_{xL}, r_{xU}, r_y, r_{yL}, r_{yU} \\ \in [0,1]\}.$$

W [A1] habilitant podał również warunek równości dwóch wielowymiarowych liczb zacienionych RDM.

W RDMSA, dwie liczby zacienione $X = \{x: x = x_1 + r_{xL}(x_2 - x_1) + r_x[x_3 - x_1 + r_{xU}(x_4 - x_3) - r_{xL}(x_2 - x_1)], r_x, r_{xL}, r_{xU} \in [0,1]\}$ oraz $Y = \{y: y = y_1 + r_{yL}(y_2 - y_1) + r_y[y_3 - y_1 + r_{yU}(y_4 - y_3) - r_{yL}(y_2 - y_1)], r_y, r_{yL}, r_{yU} \in [0,1]\}$ są równe, jeżeli ich korespondujące punkty są równe, tj.:

$X = Y$ jeżeli $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$ i $x_3 = y_3$ i $x_4 + y_4$ i $r_x = r_y$ i $r_{xL} = r_{yL}$ i $r_{xU} = r_{yU}$.

Bezpośrednim rozwiązaniem w RDMSA jest wielowymiarowa formuła. Na podstawie bezpośredniego rozwiązania można wyznaczyć każde cząstkowe rozwiązanie zadanego problemu. Bezpośrednie rozwiązanie może być przedstawione za pomocą rozwiązań wtórnych (wskaźników rozwiązania). Rozwiązaniami wtórnymi mogą być: rozpiętość, rozkład miary liczebności lub środek ciężkości. Dla porównania rozwiązań w arytmetykach SSA i RDMSA Landowski w [A1] zdefiniował rozpiętość rozwiązania bezpośredniego (ang. a span of the direct solution).

Definicja 13 (Landowski [A1], Definicja 12 (Rozpiętość rozwiązania bezpośredniego). Dla liczb zacienionych X i Y zapisanych w notacji RDM oraz podstawowych operacji $\odot \in \{+,-,\cdot,/\}$, rozpiętość bezpośredniego rozwiązania jest liczbą zacienioną określoną jako (operacja / zachodzi tylko jeżeli $0 \notin Y$):

$$\begin{aligned} span\left(X \odot Y(r_x, r_y, r_{xL}, r_{yL}, r_{xU}, r_{yU})\right) = (&\min_{\substack{r_{xL}, r_{xU} \\ r_{yL}, r_{yU}}}\{X \odot Y(r_x^{min}, r_y^{min}, r_{xL}, r_{yL}, r_{xU}, r_{yU})\}, \\ &\max_{\substack{r_{xL}, r_{xU} \\ r_{yL}, r_{yU}}}\{X \odot Y(r_x^{min}, r_y^{min}, r_{xL}, r_{yL}, r_{xU}, r_{yU})\}, \\ &\min_{\substack{r_{xL}, r_{xU} \\ r_{yL}, r_{yU}}}\{X \odot Y(r_x^{max}, r_y^{max}, r_{xL}, r_{yL}, r_{xU}, r_{yU})\}, \\ &\max_{\substack{r_{xL}, r_{xU} \\ r_{yL}, r_{yU}}}\{X \odot Y(r_x^{max}, r_y^{max}, r_{xL}, r_{yL}, r_{xU}, r_{yU})\}), \end{aligned}$$

gdzie wartości r_x^{min} i r_y^{min} są tymi r_x i r_y, dla których $X \odot Y$ jest minimalne, natomiast wartości r_x^{max} i r_y^{max} są tymi r_x i r_y, dla których $X \odot Y$ jest maksymalne.

W pracy [A1] habilitant podał również algorytm generowania rozpiętości bezpośredniego rozwiązania w RDMSA.

Algorytm 1. Generowanie rozpiętości rozwiązania bezpośredniego w RDMSA

Krok 1: Dla granicznych wartości {0,1} zmiennych RDM, obliczyć cząstkowe rozwiązania dla operacji arytmetycznej $X \odot Y$. Krok 2: Określić wartości r_x^{min} i r_y^{min}, dla których rozwiązania cząstkowe przyjmują wartość minimalną. Krok 3: Określić wartości r_x^{max} i r_y^{max}, dla których rozwiązania cząstkowe przyjmują wartość maksymalną. Krok 4: Dla wartości r_x^{min} i r_y^{min} z kroku 2, znaleźć wartość minimalną i maksymalną rozwiązań cząstkowych, które są brzegowymi wartościami dolnego cienia. Krok 5: Dla wartości r_x^{max} i r_y^{max} z kroku 3, znaleźć wartość minimalną i maksymalną rozwiązań cząstkowych, które są brzegowymi wartościami górnego cienia.

Źródło: Landowski [A1].

W pracy [A1] Landowski podaje 7 lematów dotyczących własności algebraicznych arytmetyk SSA i RDMSA. Dla lematów, które nie są oczywiste przeprowadzono dowód matematyczny.

W tabeli 1 przedstawiono sumaryczne zestawianie własności działań w SSA i RDMSA określonych w formie siedmiu lematów i jednej uwagi przez habilitanta.

Tabela 1. Własności algebraiczne arytmetyk SSA i RDMSA

Własność algebraiczna	SSA	RDMSA
Przemienność dodawania	zachodzi	zachodzi
Przemienność mnożenia	zachodzi	zachodzi
Łączność dodawania	zachodzi	zachodzi
Łączność mnożenia	zachodzi	zachodzi
Element odwrotny dodawania	nie istnieje, z wyjątkiem zdegenerowanej liczby zacienionej	istnieje
Element odwrotny mnożenia	nie istnieje, z wyjątkiem zdegenerowanej liczby zacienionej	istnieje
Rozdzielność mnożenia względem dodawania	w ogólności nie zachodzi	zachodzi
Anulacja dla dodawania	zachodzi	zachodzi

Źródło: Landowski [A1].

Różnice w SSA i RDMSA oraz zastosowanie przedstawionej teorii liczb zacienionych pokazano w problemach obliczeniowych z liczbami zacienionymi. Przykład 2 w [A1] pokazuje, że wynik w formie liczby zacienionej jest tylko wskaźnikiem pełnego rozwiązania, w którym istotne informacje są niewidoczne. Obliczone za pomocą SSA i RDMSA liczby zacienione (wskaźniki rozwiązania) są równe, jednak bezpośrednie rozwiązanie w RDMSA w postaci wielowymiarowej formuły wskazuje, że wyniki są różne. Przykład 3 [A1] pokazuje, że w niektórych sytuacjach wyniki w SSA pochodzące z sekwencji operacji mogą być przeszacowane. W przykładzie 4 [A1] rozwiązano proste zacienione równanie $A + X = B$ ze względu na zmienną X wykorzystując SSA i RDMSA. Pokazano, że SSA nie radzi sobie z tym problemem, w wyniku otrzymano niewłaściwą liczbę zacienioną (ang. an improper shadowed number). Wielowymiarowa RDMSA daje poprawne rozwiązanie. Ponadto, dla bezpośredniego rozwiązania RDMSA obliczono wskaźniki w postaci: rozpiętości, rozkładu miary liczności oraz środki ciężkości. W przykładzie 5 [A1] pokazano, że w SSA wartość funkcji zależy od formy jej zapisu, wada ta nie występuje w wielowymiarowej RDMSA. Zastosowanie arytmetyk do bardziej skomplikowanych problemów pokazano w przykładach 6 i 7 [A1]. W przykładzie 6 rozwiązano zacienione równanie różniczkowe, natomiast w przykładzie 7 rozwiązano za pomocą SSA i RDMSA zacieniony układ równań liniowych. Dodatkowo, przykład 1 w [A1] przedstawia w sposób graficzny istnienie elementu odwrotnego mnożenia w RDMSA.

Przedstawiona arytmetyka RDMSA wprowadza wielowymiarowe podejście do rozwiązywania problemów z niepewnością. Podejście to jest wolne od problemu silnego wzrostu rozpiętości rozwiązania. Przedstawiona teoria w [A1] pomoże rozwinąć badania nad obliczeniami granularnymi, w szczególności teorię zbiorów zacienionych, jak również może być wykorzystana w teorii podejmowania decyzji.

Należy podkreślić, że artykuł dotyczący teorii liczb zacienionych [A1] został opublikowany w *Information Sciences*, którego Redaktorem Naczelnym jest twórca zbiorów zacienionych Prof. W. Pedrycz.

4c.5. Podsumowanie

Głównymi innowacjami i osiągnięciami naukowymi habilitanta w przedstawionym powiązanym tematycznie cyklu publikacji są:

[1] Rozszerzenie teorii zbiorów zacienionych poprzez: zdefiniowanie liczby zacienionej (ang. shadowed number) oraz rozmytej liczby zacienionej (ang. shadowed fuzzy number); zdefiniowanie pojęć, które charakteryzują liczbę zacienioną, takich jak: Core, Shadow Support, RDM shadow; określenie zdegenerowanej liczby zacienionej; określenie standardowej arytmetyki liczb zacienionych (ang. standard shadowed arithmetic (SSA)); zdefiniowanie pojęcia wielowymiarowej RDM liczby zacienionej (ang. multidimensional RDM shadowed number); określenie wielowymiarowej RDM arytmetyki liczb zacienionych (ang.

multidimensional RDM shadowed arithmetic (RDMSA)); podanie definicji rozpiętości bezpośredniego rozwiązania dla RDMSA; opracowanie algorytmu generującego rozpiętość bezpośredniego rozwiązania otrzymanego za pomocą RDMSA; określenie własności podstawowych operacji na liczbach zacienionych w arytmetyce SSA oraz RDMSA, [A1].

[2] Zastosowanie arytmetyki SSA i wielowymiarowej RDMSA do rozwiązania problemów algebraicznych oraz pokazanie różnic dla tych dwóch arytmetyk. Przedstawione przykłady zastosowań dotyczą między innymi rozwiązywania: równania zacienionego, zacienionego układu równań liniowych, zacienionego równania różniczkowego ze zmiennymi zacienionymi, [A1].

[3] Podanie definicji wielowymiarowej horyzontalnej liczby rozmytej z brzegami liniowymi i nieliniowymi; zdefiniowanie arytmetyki dla horyzontalnej liczby rozmytej z brzegami liniowymi i nieliniowymi oraz udowodnienie podstawowych własności tej arytmetyki; zdefiniowanie bezpośredniego rozwiązania operacji na horyzontalnych liczbach rozmytych z brzegami liniowymi i nieliniowymi; podanie definicji rozpiętości wyniku operacji na horyzontalnych liczbach rozmytych z brzegami liniowymi i nieliniowymi; podanie metody rozwiązywania układów równań liniowych ze zmiennymi będącymi liczbami rozmytymi wykorzystującej horyzontalną liczbę rozmytą; wykazanie na przykładach, że metody rozwiązywania układów równań liniowych ze zmiennymi rozmytymi przedstawione w cytowanych artykułach nie generują pełnego rozwiązania, są przeszacowane lub dają błędne wyniki, [A2, A3].

[4] Zastosowanie wielowymiarowego, horyzontalnego podejścia do rozwiązania problemu algebraicznego oraz problemu obliczeń na słowach, [A7].

[5] Zdefiniowanie w postaci zbioru podejścia wielowymiarowego RDM do interwału; porównanie wyników otrzymanych korzystając ze standardowej arytmetyki interwałowej oraz arytmetyki interwałowej RDM, [A4, A8].

[6] Zaproponowanie podejścia posybilistycznego i probabilistycznego do określenia niepewności za pomocą interwałów oraz opracowanie wzorów na wskaźniki rozwiązania bezpośredniego dla przedstawionych podejść, [A9].

[7] Przedstawienie i udowodnienie podstawowych własności algebraicznych dla standardowej arytmetyki interwałowej oraz arytmetyki interwałowej RDM, [A8].

[8] Opracowanie wzorów, korzystając ze wzorów Cardano, na rozwiązania równań sześciennych ze współczynnikami niepewnymi w postaci interwałów z wykorzystaniem RDMIA; zastosowanie opracowanych wzorów do rozwiązywania równań sześciennych ze współczynnikami w postaci interwałów, [A4].

[9] Wykazanie, że pełnym bezpośrednim rozwiązaniem działań na interwałach jest wielowymiarowa granula informacji, gdzie interwał jest wskaźnikiem pełnego wielowymiarowego rozwiązania, [A5].

[10] Zdefiniowanie zespolonej postaci liczby interwałowej w wielowymiarowej notacji RDM; określenie podstawowych operacji arytmetycznych dla zespolonych liczbach interwałowych RDM (zespolona interwałowa arytmetyka RDM, ang. complex RDM interval arithmetic (C-RDMIA)); zdefiniowanie rozpiętości (ang. span) zespolonego rozwiązania bezpośredniego otrzymanego za pomocą C-RDMIA; przedstawienie i udowodnienie własności arytmetycznych dla C-RDMIA; pokazanie, na przykładach, że wynik otrzymany za pomocą C-RDMIA nie zależy od formy zapisu rozpatrywanego problemu, [A6].

Według dostępnych baz danych publikacje przedstawione w cyklu są cytowane przez wielu naukowców z całego świata, na przykład przez: L. Stefanini, M.L. Guerra, R.A. Aliev, A.V. Alizadeh, O.H. Huseynov, R.R. Aliyev, M. Mazandarani, N. Pariz, A.V. Kamyad, M. Najariyan, Y. Zhao, A. Mohsenzadeh, H. Motameni, M.J. Er, P.M. Vidovic, A.T. Saric, M.L. Zeinalova, L.A. Gardashova. Ponadto, publikacje te są cytowane między innymi w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports, takich jak: *ISA Transactions, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, International*

Journal of Fuzzy Systems, Journal of the Franklin Institute – Engineering and Applied Mathematics, Information Sciences, International Journal of Electrical Power & Energy Systems.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

Omówione poniżej osiągnięcia naukowo-badawcze dotyczą okresu po uzyskaniu stopnia doktora.

Tematyka przedstawiona w cyklu publikacji została również poruszona w szeregu innych publikacji. Habilitant jest autorem lub współautorem łącznie 22 publikacji (w tym 9 pozycji z cyklu) dotyczącej tematyki wielowymiarowego podejścia do zmiennych niepewnych.

Badania nad kompletnościowym estymatorem prawdopodobieństwa hipotez

Osobny wątek badawczy dotyczył badań nad kompletnościowym estymatorem prawdopodobieństwa hipotez. Teoria prawdopodobieństwa jest szeroko stosowana w sztucznej inteligencji, na przykład do oceny jakości reguł decyzyjnych w machine learning jak również w data mining lub do probabilistycznego rozszerzenia zbiorów rozmytych i zbiorów przybliżonych. Motywacją do badań nad kompletnościowym estymatorem był fakt, że stosowany najczęściej estymator częstościowy w postaci $fr_h = n_h/n$, gdzie n_h to liczba zdarzeń sprzyjających przy n próbach, dla pojedynczej próbki daje tylko możliwość prawdopodobieństwa wynoszącą 0 lub 1. Problem ten znany jest pod nazwą „problem of the single case" [3, 14]. Testowany estymator prawdopodobieństwa pozbawiony jest tej wady. Habilitant na podstawie napisanego własnego oprogramowania testował kompletnościowy estymator pod względem otrzymanych wartości prawdopodobieństwa przy różnych założeniach wartości prawdopodobieństwa. Badania wykazały, że przy małej liczbie próbek w większości przypadków estymacja wartości prawdopodobieństwa otrzymana za pomocą kompletnościowego estymatora miała mniejszy błąd niż przy estymatorze częstościowym. Przy dużej liczbie próbek wartości estymatorów są zbieżne. Wyniki habilitant opublikował w pracach [B1, B5, B9]. Ponadto habilitant przewagę kompletnościowego estymatora pokazał na przykładach korzystając z danych z bazy UC Irvine Machine Learning Repository [B1, 5, 44].

Badania dotyczące problemu w zakresie zrównoważonej logistyki miejskiej

Habilitant, w ramach międzynarodowego projektu New Cooperative Business Models and Guidance for Sustainable City Logistics (NOVELOG), w latach 2015-2018, finansowanego z programu Horizon 2020 (grant agreement No 636626), brał udział w opracowaniu modułu „Adaptability and transferability module". Wkład własny habilitanta w realizowaniu tego osiągnięcia polegał na opracowaniu algorytmu mapowania potrzeb i rozwiązań w zakresie zrównoważonej logistyki miejskiej. Do algorytmu mapowania habilitant opracował funkcję określającą miarę dopasowania dobrych praktyk odpowiednich do rozwiązania określonego problemu występującego w mieście w zakresie zrównoważonej logistyki.

Powstałe w ramach projektu NOVELOG narzędzie „Understanding the Cities Tool" (UCT) ma na celu ułatwienie współpracy, budowania konsensusu i wspólnego porozumienia między zainteresowanymi stronami miasta, niezbędnego do zapewnienia długoterminowych rozwiązań problemów logistyki miejskiej. Narzędzie UCT było testowane w wielu miastach Europy. Miastami pilotażowymi były między innymi: Ateny, Turyn, Graz, Rzym, Barcelona oraz Mechelen. Szczegóły projektu znajdują się na stronie projektu (http://novelog.eu/) oraz na stronie poświęconej otrzymanemu narzędziu UCT: (http://www.uct.imet.gr/).

Na potrzeby projektu NOVELOG powstało międzynarodowe konsorcjum o tej nazwie, w którym habilitant brał udział. W skład konsorcjum wchodziły między innymi uczelnie, centra badawcze, firmy oraz miasta, takie jak: 1. Centre for Research and Technology Hellas - Lider Projektu 2. London

Borough of Barking and Dagenham 3. University of Newcastle Upon Tyne 4. B.I.M. Mobilitätsconsulting & Engineering 5. Maritime University of Szczecin 6. European Road Transport Telematics Implementation Coordination Organisation 7. IRU Projects Asbl 8. City of Mechelen 9. POLIS - Promotion of Operational Links With Integrated Services, Association Internationale 10. City of Copenhagen 11. RENAULT SAS 12. Development Agency of the Municipality of Athens SA 13. KUEHNE+NAGEL Societe Anonyme for Transports & Logistics 14. TRAINOSE S.A. 15. University of Thessaly 16. Ajuntament de Barcelona 17. Consorci Centre D'innovacio Del Transport 18. Panteia BV 19. City of Göteborg 20. D'Appolonia S.p.A. 21. City of Pisa 22. Institute of Transport and Logistics Foundation 23. City of Turin 24. Regione Emilia Romagna 25. Roma Servizi per la Mobilità 26. Center for transport and logistics / Universita degli study di Roma La Sapienza 27. Venice International University 28. City of Graz.

Ekstrakcja wiedzy z danych eksperymentalnych

Habilitant brał również udział w projekcie finansowanym przez Narodowe Centrum Nauki (nr rej. 2012/05/B/HS4/03818) pn. „Badanie potrzeb informacyjnych środowiska heterogenicznego w systemie zrównoważonego miejskiego transportu towarowego", w latach 2013 – 2016. Habilitant był odpowiedzialny za część projektu „Zastosowanie metod ekstrakcji wiedzy na potrzeby zarządzania zrównoważonym miejskim transportem towarowym". Habilitant w ramach tego projektu zajmował się ekstrakcją wiedzy z danych eksperymentalnych. Wykorzystując teorię zbiorów przybliżonych z ponad 245 tys. próbek dokonał ekstrakcji wiedzy otrzymując 16 dobrze zdefiniowanych reguł decyzyjnych. Dodatkowo do ekstrakcji wiedzy wykorzystywał również metody statystyczne, za pomocą których w sposób kompleksowy i graficznie przedstawił dane dotyczące ruchu miejskiego pochodzące z eksperymentu.

Projekty badawcze własne habilitanta

Ponadto, habilitant był kierownikiem i wykonawcą dwóch projektów w ramach dotacji na działalność statutową Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, badania dotyczyły takich tematów jak:

- Zastosowanie wielowymiarowej arytmetyki RDM oraz horyzontalnej funkcji przynależności do wykonywania działań na liczbach rozmytych, 1.01.2016 – 31.12.2017, nr projektu 2/S/IZT/16, kierownik i wykonawca M. Landowski,
- Wielowymiarowa interwałowa arytmetyka RDM i jej zastosowania do rozwiązywania problemów teorii niepewności, 1.01.2017 – 31.12.2018, nr projektu 3/S/IZT/17, kierownik i wykonawca M. Landowski.

W ramach tych projektów powstały niektóre artykuły naukowe publikowane w latach 2016 – 2018 oraz habilitant brał czynny udział w międzynarodowych konferencjach.

Nagrody za działalność naukową habilitanta

Za działalność naukową habilitant otrzymał następujące nagrody:

- nagroda indywidualna II stopnia Rektora Akademii Morskiej w Szczecinie za działalność naukową, 2018 rok
- **nagroda za artykuł, Best Paper Award** – 13th International Conference on Theory and Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, ICAFS 2018, Warsaw, Poland, August 27-28, 2018, współautorstwo artykułu pt. „Why multidimensional fuzzy arithmetic?"
- nagroda indywidualna III stopnia Rektora Akademii Morskiej w Szczecinie za działalność naukową, 2010 rok.

Udział w konferencjach międzynarodowych

Habilitant brał czynny udział w międzynarodowych konferencjach naukowych, takich jak:

- Seventeenth International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets, IWIFSGN'2018, Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk, Warszawa, Polska, 27-28.09.2018 – wygłoszenie referatu.
- 21st International Multi-Conference on Advanced Computer Systems, Międzyzdroje, Poland, 24-26.09.2018 – wygłoszenie referatu.
- 3rd International Conference Green Cities 2018, Szczecin, Polska, 13-14.09.2018 – wygłoszenie referatu.
- 13th International Conference on Theory and Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, ICAFS 2018, Warszawa, Polska, 27-28.08.2018 – współautorstwo wygłoszonego referatu, **Nagroda Best Paper Award**.
- The 10th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, EUSFLAT 2017, Warszawa, Polska, 11-15.09.2017 – 2 referaty: 1 wygłoszenie referatu i 1 współautorstwo wygłoszonego referatu.
- 20th International Multi-Conference on Advanced Computer Systems, Międzyzdroje, Polska, 19-21.10.2016 – 2 referaty: 1 wygłoszenie referatu i 1 współautorstwo wygłoszonego referatu.
- Fourteenth International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets, IWIFSGN'2015 / Flexible Query Answering Systems 2015, Kraków, Polska, 26-28.10.2015 – współautorstwo wygłoszonego referatu.
- Thirteenth International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets, IWIFSGN'2014 / 7th IEEE Conference on Intelligent Systems 2014 IEEE IS 2014, Warszawa, Polska, 24-26.09.2014 – wygłoszenie referatu.
- Twelfth International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets, IWIFSGN'2013, Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk, Warszawa, Polska, 11.10.2013 – współautorstwo wygłoszonego referatu.
- Eleventh International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets, IWIFSGN'2012, Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk, Warszawa, Polska, 12.10.2012 – współautorstwo wygłoszonego referatu.
- 7th International Conference on Multimedia & Network Information Systems, MISSI'10, Politechnika Wrocławska, Wrocław, Polska, 23-24.09.2010 – wygłoszenie referatu.

Sumaryczny impact factor oraz sumaryczny pięcioletni impact factor według listy Journal Citation Reports (JCR), zgodnie z rokiem opublikowania:

IF = 14.013, 5yIF = 14.584

Sumaryczna liczba punktów MNiSW wynosi 441, uwzględniając udział procentowy habilitanta suma punktów MNiSW wynosi 303.67.

Liczba publikacji i cytowań oraz indeks Hirscha według bazy Web of Science (WoS), Scopus oraz Google Scholar

Baza biometryczna	Liczba publikacji naukowych	Liczba cytowań	Liczba cytowań, bez autocytowań	Indeks Hirscha
Web of Science Core Collection	14 + 8*	52	25	4
Scopus	20 + 4**	84	43	5
Google Scholar	35 + 3***	198	104	7

* 8 publikacji oczekuje na wpis do bazy WoS, są to [A1, A2, B2, B19, B20, B21, B22, B23] wymienione w zał.nr3

** 4 publikacje oczekują na wpis do bazy Scopus, są to [B19, B21, B22, B23] wymienione w zał. nr 3

*** 3 publikacje oczekują na wpis do bazy Google Scholar, są to [B21, B22, B23] wymienione w zał. nr 3

Literatura

[B1] A. Piegat, M. Landowski, Optimal estimator of hypothesis probability for data mining problems with small samples. International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences 22(3), 2012, 629-645.

[B5] A. Piegat, M. Landowski, Nowy estymator prawdopodobieństwa hipotez Ep_{h1} i wyniki badań jego dokładności. Metody Informatyki Stosowanej 1/2011 (26), 2011, 93-106.

[B6] A. Piegat, M. Landowski, Is the conventional interval arithmetic correct? Journal of Theoretical and Applied Computer Science 6(2), 2012, 27–44.

[B9] A. Piegat, M. Landowski, Mean square error optimal completeness estimator Ep_{h2} of probability. Journal of Theoretical and Applied Computer Science 7(3), 2013, 3-20.

[1] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets Syst. 20, 1986, 87-96.

[2] L. Boading, Uncertainty theory. 2nd edn. Springer, 2007.

[3] K. Burdzy The search for certainty. On the clash of science and philosophy of probability. World Scientific, New Jersey, 2009.

[4] Y. Chalco-Cano, W. Lodwick, B. Bede, Single level constraint interval arithmetic. Fuzzy Sets Syst. 257, 2014, 146–168.

[5] K. Cios, L. Kurgan, SPECT heart data set. UCI Machine Learning Repository, 2001, http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/spect+heart.

[6] D. Dubois, H. Prade, Operations on fuzzy numbers. Int. J. System Sci. 9, 1978, 576–578.

[7] L. Dymowa, Soft computing in economics and finance. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.

[8] M.A.H. El-Hawy, H.A. Hassan, H.A. Hefny, K.T. Wassif, An improved fuzzy number approximation using shadowed sets. Int. J. Comput. Appl. Technol. 118 (25), 2015, 9–15.

[9] L.H. de Figueiredo, J. Stolfi, Affine arithmetic: concepts and applications. Numer. Algo. 37(1), 2004, 147–158.

[10] M. Friedman, M. Ming, A. Kandel, Fuzzy linear systems. Fuzzy Sets Syst. 96, 1998, 201–209.

[11] R. E. Giachetti, R. E. Young, Analysis of the error in the standard approximation used for multiplication of triangular and trapezoidal fuzzy numbers and the development of a new approximation. Fuzzy Sets Syst. 91, 1997, 1-13.

[12] R. E. Giachetti, R. E. Young, A parametric representation of fuzzy numbers and their arithmetic operators. Fuzzy Sets Syst. 91, 1997, 185-202.

[13] P. Grzegorzewski, Fuzzy number approximation via shadowed sets. Inf. Sci. 225, 2013, 35–46.

[14] A. Hajek, Interpretations of probability. In E.N. Zalta (ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2011, http://plato.stanford.edu/entries/probability-interpret/.

[15] E. R. Hansen, A Generalized Interval Arithmetic. In: Nickel K. (eds) Interval Mathematics. IMath 1975. Lecture Notes in Computer Science, vol. 29. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975.

[16] M. Hanss, Applied fuzzy arithmetic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.

[17] O. Hryniewicz , An evaluation of the reliability of complex systems using shadowed sets and fuzzy lifetime data, Int. J. Autom. Comput. 2, 2016, 145–150.

[18] A. Kandel, A. Martins, R. Pacheco, On the Very Real Distinction Between Fuzzy and Statistical Methods. Technometrics 37(3), 1995, 276-281.

[19] A. Kaufmann, M.M. Gupta, Introduction to fuzzy arithmetic. Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.

[20] G.J. Klir, Fuzzy arithmetic with requisite constraints. Fuzzy Sets Syst. 91, 1997, 165-175.

[21] G.J. Klir, B. Yuan, Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems. Selected paper by L. Zadeh, World Scientic, Singapore, New Jersey, 1996.

[22] G.J. Klir, Y. Pan. Constrained fuzzy arithmetic, basic questions and some answers. Soft Comput. 2, 1998, 100–108.

[23] K. Knopp, Elements of the Theory of Functions. Dover Publications, New York, 1952.

[24] W. Kosinski, P. Prokopowicz, D. Slezak, Ordered fuzzy numbers. Bull. Pol. Acad. Sci. Ser. Sci. Math. 51(3), 2003, 327-338.

[25] B. Kovalerchuk, V. Kreinovich, Comparison of formulations of applied tasks with intervals, fuzzy sets and probability approaches. Proceedings of the 2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ), Vancouver, Canada, 2016, 1478–1483.

[26] S. Liu, J. Y. Lin Forest, Grey systems, theory and applications. Springer, Heidelberg, 2010.

[27] W.A. Lodwick, D. Dubois, Interval linear systems as a necessary step in fuzzy linear systems. Fuzzy Sets Syst. 281, 2015, 227-251.

[28] S.M. Markov, Extended interval arithmetic and some applications. Freiburger Intervall-Berichte 78 (4), 1978, 1–12.

[29] F. Mazarhuiya, A. Mahanta, H. Baruah, Solution of fuzzy equation a+x = b using method of superimposition. Applied Mathematics 2(8), 2011, 1039–1045.

[30] R.E. Moore, C.T. Young, Interval analysis I. Technical Report, Lockheed Missiles and Space Co., 1959.

[31] R.E. Moore, R.B. Kearfott, M.J Cloud, Introduction to Interval Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2009.

[32] A. Neumaier, A distributive interval arithmetic. Freiburger Intervall-Berichte 82 (10), 1982, 31–38.

[33] A. Neumaier, Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[34] W. Pedrycz, Shadowed sets: representing and processing fuzzy sets. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part B-Cybern. 28, 1998, 103–109.

[35] W. Pedrycz, From fuzzy sets to shadowed sets: interpretation and computing. Int. J. Intell. Syst. 24, 2009, 48–61.

[36] W. Pedrycz, F. Gomide, Fuzzy systems engineering. Wiley, Hoboken, 2007.

[37] W. Pedrycz, A. Skowron, V. Kreinovich (eds.), Handbook of granular computing. Wiley, Chichester, 2008.

[38] M.S. Petkovic, L.D. Petkovic, Complex Interval Arithmetic and Its Applications, 1 edn. Mathematical Research, vol. 105. WILEY-VCH, Berlin, 1998.

[39] A. Piegat, Fuzzy modeling and control. Physica-Verlag, A Springer-Verlag Company, Heidelberg, New York, 2001.

[40] E.D. Popova, Multiplication Distributivity of Proper and Improper Intervals. Reliable Computing 7(2), 2001, 129–140.

[41] R. Roche, Complex Interval Arithmetic with Some Applications. Lockheed Missiles & Space Company, Sunnyvale, 1966.

[42] D.K. Salkuyeh, On the solution of a class of fuzzy system of linear equations. Sadhana Acad. Proc. Eng. Sci. 40, 2015, 369–377.

[43] P. Sevastjanov, L. Dymova, A new method for solving interval and fuzzy equations: Linear case. Inf. Sci. 179 (2009) 925–937.

[44] R.S. Siegler, Balance scale weight & distance database. UCI Machine Learning Repository, 1994, http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/balance+scale.

[45] T. Sunaga, Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis. RAAG Memoirs 2, 1958, 547–564 .

[46] H. Tahayori, A. Sadeghian, W. Pedrycz, Induction of shadowed sets based on the gradual grade of fuzziness. IEEE Trans. Fuzzy Syst. 21(5), 2013, 937–949.

[47] M. Warmus, Calculus of approximations. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 4 (5), 1956, 253–259.

[48] Y.Y. Yao, S. Wang, X. Deng, Constructing shadowed sets and three-way approximations of fuzzy sets. Inf. Sci. 412-413, 2017, 132-153.

[49] L.A. Zadeh. Fuzzy Sets. Inf. Control 8, 1965, 338–353.

[50] L.A. Zadeh, Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. I. Inf. Sci. 8, 1975, 199–249.

[51] L.A. Zadeh, Discussion: Probability Theory and Fuzzy Logic are Complementary Rather than Competitive. Technometrics 37(3), 1995, 271-276.

[52] L.A. Zadeh, Fuzzy logic = computing with words. IEEE Trans. Fuzzy Syst. 4(2), 1996, 103–111.

[53] L.A. Zadeh, From computing with numbers to computing with words. Ann. New York Acad. Sci. 929(1), 2001, 221–252.